Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 5 - maximizar y minimizar pendiente de recta tangente

1. Sea la función $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x)$ **definida para** $x>0$ **.**

a) Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica en el punto de abscisa $x=1$ **.**

c) Halla el área del triángulo formado por la recta tangente a la función en el punto $x=\frac{1}{e}$ **con los semiejes positivos de coordenadas.**

a) El punto de máxima pendiente de $f(x)$ es el que maximiza a la función derivada $f'(x)$. Es decir, debemos obtener a segunda derivada e igualarla a cero, para obtener el máximo absoluto de la función derivada.

$$f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x) \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x} \rightarrow f''(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \rightarrow \frac{1-x}{x^3}=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{punto crítico de } f'(x)$$

Para decidir si es un máximo o un mínimo de $f'(x)$, vamos a evaluar la tercera derivada en $x=1$ (es decir, evaluamos en la segunda derivada de la primera derivada).

$$f'''(x)=\frac{-3}{x^4}+\frac{2}{x^3} \quad , \quad f'''(1)=-3+2<0 \rightarrow x=1 \text{ es un máximo relativo}$$

Además $x=1$ es máximo absoluto de la función por ser el único extremo relativo de la función en su dominio → Punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ donde acontece la pendiente máxima de $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x)$.

b) $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x) \rightarrow f(1)=\frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

$$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x} \rightarrow f'(1)=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2} \rightarrow \text{Pendiente de la recta tangente } m_{tangente}=\frac{1}{2}$$

El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1 . Por lo que a recta normal a la función en $x=1$ tendrá pendiente $m_{normal}=-2$. Y con la pendiente de la recta normal y el punto por donde pasa, podemos escribir la ecuación punto-pendiente.

$$-2=\frac{y-\frac{1}{2}}{x-1} \quad \rightarrow \quad -2x+2=y-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y=-2x+\frac{5}{2}$$

c) Primero obtenemos la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x=\frac{1}{e}$.

$$f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x) \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e}{2}-1=\frac{e-2}{2} \quad \rightarrow \text{Punto} \quad \left(\frac{1}{e},\frac{e-2}{2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-e^2}{2}+e=\frac{-e^2+2e}{2} \quad \rightarrow \text{Pendiente} \quad m_{tangente}=\frac{-e^2+2e}{2}$$

Y la ecuación de la recta tangente será:

$$\frac{-e^2+2e}{2}=\frac{y-\frac{e-2}{2}}{x-\frac{1}{e}}$$

Debemos obtener los puntos de corte de esta recta con los ejes cartesianos, para sacar así la base y la altura del triángulo rectángulo que forma con los semiejes positivos de coordenadas.

$$x=0 \quad \rightarrow \quad \frac{e-2}{2}=y-\frac{e-2}{2} \quad \rightarrow \quad y=\frac{e-2}{2}+\frac{e-2}{2}=e-2\simeq 0{,}72$$

$$y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{-e^2+2e}{2}=\frac{\frac{-e+2}{2}}{x-\frac{1}{e}} \quad \rightarrow \quad x-\frac{1}{e}=\frac{\frac{-e+2}{2}}{\frac{-e^2+2e}{2}} \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}\simeq 0{,}74$$

Y el área resulta → $A=\frac{1}{2}\cdot 0{,}72\cdot 0{,}74\simeq 0{,}26 \quad u^2$

2. Sea la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$ definida en toda la recta real. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es mínima (ayuda: recuerda la relación que hay entre pendiente y derivada a través de la interpretación geométrica de la derivada).

La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada. Por lo tanto, si me preguntan cuando la pendiente es mínima es lo mismo que calcular cuándo la función derivada es mínima.

¿Y qué significa minimizar una función? Derivarla e igualarla a cero, ¿verdad?

¿Y si debo minimizar la función derivada? Pues derivo la función derivada e igualo a cero. Es decir, hacemos la segunda derivada igual a cero. Moraleja: minimizar o maximizar la pendiente de la recta tangente, es aplicar la condición necesaria de punto de inflexión.

$f(x)=\frac{x}{e^x} \rightarrow f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$ → Para evitar liarnos con tantas "primas" de la derivada, vamos a llamar a la primera derivada $f'(x)=g(x)=\frac{1-x}{e^x}$ → Y ahora simplemente obtenemos el mínimo relativo de $g(x)$. Un problema que hemos resuelto miles de veces.

$g'(x)=0 \rightarrow g'(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-2+x}{e^x} \rightarrow -2+x=0 \rightarrow x=2 \rightarrow$ punto crítico de la función $g(x)$.

Aplicamos la condición suficiente de la segunda derivada para ver si es un mínimo relativo.

$g''(x)=\frac{e^x-(-2+x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{1-(-2+x)}{e^x}=\frac{3-x}{e^x} \rightarrow g''(2)=\frac{3-2}{e^2}>0 \rightarrow x=2$ es un mínimo relativo de la derivada. Por lo tanto, es un mínimo relativo de la pendiente de la recta tangente.

Obtenemos su imagen en la función de partida → $f(2)=\frac{2}{e^2} \rightarrow (2,\frac{2}{e^2})$ minimiza la pendiente de la recta tangente a la función.