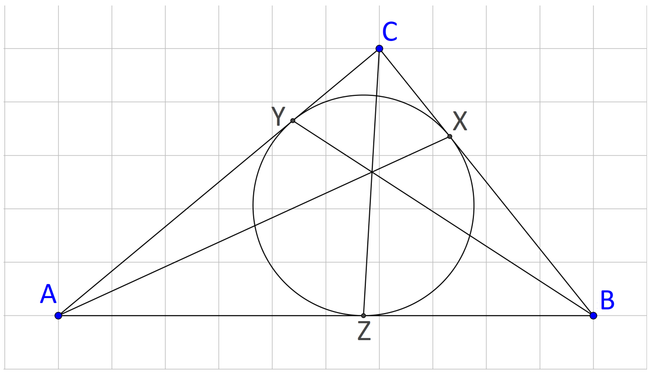
O ponto de Gergonne

Christian Kendi Kohatsu Tanigava (Licenciatura em Matemática - FCTUC)

March 19, 2020

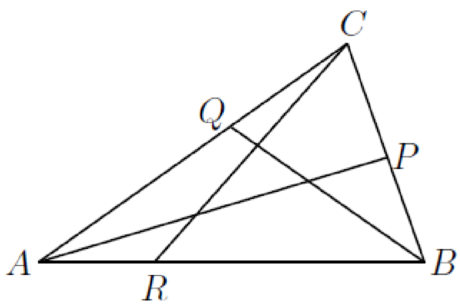
Primeiramente, daremos a definição do *Ponto de Gergonne*:

Definifção: Seja $[ABC]$ um triângulo e X, Y, Z os pontos de tangência da sua circunferência inscrita com os lados $[BC], [AC]$ e $[AB]$. Temos que $[AX], [BY]$ e $[CZ]$ se intersectam num ponto (*Ponto de Gergonne*).



Para fazer a demonstração, enunciaremos um teorema cuja a demonstração será omitida.

Teorema de Ceva (1678): *Sejam P, Q e R pontos sobre os lados $[BC], [AC]$ e $[AB]$ do triângulo $[ABC]$, respectivamente. Então os três segmentos $[AP], [BQ]$ e $[CR]$ intersectam-se num ponto se e só se $\overline{AR}.\overline{BP}.\overline{CQ} = \overline{RB}.\overline{PC}.\overline{QA}$.*

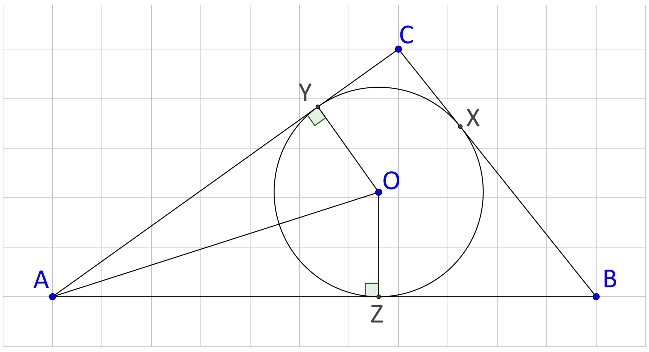


Demonstração:

Seja O o centro da circunferência inscrita no triângulo $[ABC]$.

Como X e Z são tangentes à circunferência, então temos que os ângulos $\angle AZO$ e $\angle AOY$ são retos.

Note que $Y \in \dot{A}C$ e $Z \in \dot{A}B$. Por tratarem-se de raios da circunferência inscrita em $[ABC]$, temos que $\overline{OY} = \overline{OZ}$, ou seja, as semirretas $\dot{A}C$ e $\dot{A}B$ equidistam da reta AO. Assim, temos que AO é bissetriz de $\angle CAB$.



Como o segmento $[AO]$ é um lado comum dos triângulos, pelo critério AAL, $[AOX]$ e $[AOZ]$ são congruentes, pelo que $\overline{AY} = \overline{AZ}$

Note-se que OB e OC são as bissetrizes dos ângulos ABC e $\angle CBA$, respectivamente. Além disso, com o fato de temos que X, Y, Z serem tangentes à circunferência. Podemos, de maneira análoga, verificar que $\overline{CX} = \overline{CY}$ e $\overline{BZ} = \overline{BX}$.

Logo, temos que $\overline{AZ}.\overline{BX}.\overline{CY} = \overline{AY}.\overline{BZ}.\overline{CX}$

E pelo Teorema de Ceva, $[AX], [BY]$ e $[CZ]$ se intersectam num ponto.

$\blacksquare$

Referências

-SALGUEIRO, A. (2019). Geometria. Universidade de Coimbra.