Wiederholen für die Klausur

Lösungen zu Seite 146

1 Punkte angeben

a) Infrage kommen alle Punkte auf der x_2-Achse, z. B. A(0|5|0) oder B(0|−3|0).

b) Infrage kommen alle Punkte, die auf der 1. Winkelhalbierenden der x_1x_2-Ebene liegen, z. B. P(3|3|0) oder Q(−7|−7|0).

c) Infrage kommen alle Punkte, die auf der 1. Winkelhalbierenden der x_2x_3-Ebene liegen, z. B. R(0|2|2) oder S(0|−4|−4).

2 Pyramide

a) Die 3. Koordinate aller drei Punkte A, B und C ist $x_3 = 1$. Also liegt die Grundfläche der Pyramide in einer Ebene, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist.

b) Alle Punkte P der Grundfläche der Pyramide haben als 3. Koordinate $x_3 = 1$. Für die Spitze S ist $x_3 = 5$.
Die Höhe der Pyramide beträgt also $5 - 1 = 4$ Längeneinheiten.

3 Längen und Volumen

a) A(12|−3|0) B(12|3|0) C(0|3|0)
D(0|−3|0) E(12|−3|5) F(12|3|5)
G(0|3|5) H(0|−3|5) K(12|0|9)
L(0|0|9)

b) $|\overline{EK}| = |\overrightarrow{EK}| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25} = 5$

Die Dachkanten $\overline{EK}$, $\overline{FK}$, $\overline{GL}$ und $\overline{HL}$ sind gleich lang, also alle 5 m lang. Die Dachkante $\overline{KL}$ hat die Länge 12 m.

c) $V_{Haus} = V_{Quader} + V_{Prisma}$
$= 6 \cdot 5 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 12 = 504$

Das Volumen des Hauses beträgt 504 m³.

4 Mittelpunkt einer Strecke

a) Für den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ gilt:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}-3\\4\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten M(1|1|4).

b) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}5\\-4\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-7\\-14\end{pmatrix}$

Der Punkt Q hat die Koordinaten Q(7|−7|−14).

5 Berechnungen am Parallelogramm

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel und gleich lang. Das Viereck ABCD ist also ein Parallelogramm.

b) Sind zwei der nicht zueinander parallelen Seiten, z. B. $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$, ebenfalls gleich lang, dann ist das Parallelogramm eine Raute.

$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{41}$ $|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6}$

Das Parallelogramm ist keine Raute.

c) Der Schnittpunkt S der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ist der Mittelpunkt der beiden Strecken.

$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\1{,}5\\3\end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten S(4|1,5|3).

6 Von Punkt zu Punkt

a) $\overrightarrow{AM_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ b) $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

c) $\overrightarrow{HM_3} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ d) $\overrightarrow{M_2A} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

7 Abstandsproblem

Eine Lösung ist M(0|2|1).
Die Punkte U, V und W liegen alle in der x_2x_3-Ebene. Also erhält man die Lösung z. B., wenn man das (projizierte) Dreieck U′V′W′ in der x_2x_3-Ebene mit U′(4|2), V′(0|0), W′(4|0) und M′(a|b) betrachtet.
Aus $|M'U'| = |M'W'|$ folgt
$(4-a)^2 + (2-b)^2 = (4-a)^2 + (-b)^2$ und damit $b = 1$.
Aus $|M'V'| = |M'W'|$ folgt
$(-a)^2 + (-b)^2 = (4-a)^2 + (-b)^2$ und damit $a = 2$.
Also erhält man M′(2|1). Daraus ergibt sich dann M(0|2|1).

Hinweis: Jeder Punkt M(x_1|2|1) mit beliebiger x_1-Koordinate hat zu den Punkten U, V und W den gleichen Abstand. Diese Punkte liegen alle auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

8 Parameterdarstellung einer Geraden

a) Für einen beliebigen Wert von t erhält man einen weiteren Punkt auf g, z. B. für $t = 3$ den Punkt $P(14|0|-2)$.
Mögliche Parameterdarstellung:
$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

b) $\begin{pmatrix} -20 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
Die beiden Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander.
Punktprobe:
Aus $\begin{pmatrix} 86 \\ 18 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{vmatrix} t = 21 \\ t = 21 \\ t = 21 \end{vmatrix}$
Der Punkt $(86|18|-38)$ liegt auf g.
Also ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 86 \\ 18 \\ -38 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$; ebenfalls eine Parameterdarstellung von g.

Lösungen zu Seite 147

9 Lage von drei Punkten

Die drei Punkte liegen auf einer Geraden, falls die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ Vielfache voneinander sind.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \overrightarrow{AB}$

Somit liegen die drei Punkte A, B und C auf einer Geraden.

10 Punkte auf einer Geraden

a) Mögliche Parameterdarstellung:
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

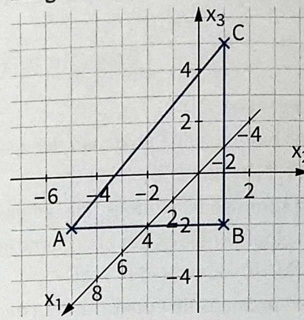
b) Man erhält einen Punkt auf g, der zwischen A und B liegt, wenn man für t einen Wert zwischen 0 und 1 einsetzt, z. B.

$t = \frac{1}{4}$: $\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad P_1\left(\frac{19}{2}\middle|\frac{1}{2}\middle|5\right)$

$t = \frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad P_2(8|0|4)$

c) Für einen Punkt auf g mit drei gleichen Koordinaten muss z. B. $11 - 6t = 1 - 2t$ und $11 - 6t = 6 - 4t$ gelten.
Dies ist der Fall für $t = \frac{5}{2}$. Für diesen Wert erhält man den Punkt $P(-4|-4|-4)$.

11 Längen von Dreiecksseiten



Seitenlängen:

$a = |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{61}$ $\qquad b = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{105}$

$c = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36} = 6$

Die Seite b ist am längsten.

12 Gleichschenkliges Dreieck

Seitenlängen bestimmen:

$a = |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ t \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{t^2 + 25}$

$b = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ t+2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{t^2 + 4t + 12}$

$c = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$

1. Möglichkeit: $a = c$
$\sqrt{t^2 + 25} = 3$ hat keine Lösung, somit können die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$ nicht gleich lang sein.

2. Möglichkeit: $b = c$
$\sqrt{t^2 + 4t + 12} = 3$ führt auf die quadratische Gleichung $t^2 + 4t + 3 = 0$ mit den Lösungen $t_1 = -3$ und $t_2 = -1$.
Probe: Für $t_1 = -3$ gilt $b = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 3$

Für $t_2 = -1$ gilt $b = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 3$

3. Möglichkeit: $a = b$
$\sqrt{t^2 + 25} = \sqrt{t^2 + 4t + 12}$ führt auf $4t = 13$, also $t = \frac{13}{4}$.

Probe: $a = |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{13}{4} \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{569}{16}}$

$b = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{21}{4} \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{569}{16}}$

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, falls man für t die Werte -3, -1 oder $\frac{13}{4}$ einsetzt.

13 Viereck untersuchen

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel, und alle vier Seiten sind gleich lang. Das Viereck ABCD ist also eine Raute.

Prüfen, ob die Raute auch ein Quadrat ist:

$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14}$ $\qquad |\overrightarrow{BD}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16} = 4$

$14 + 14 = 28 \neq 16$

Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras liegt kein rechter Winkel bei A (bzw. C). Die Raute ist also kein Quadrat.

14 Heißluftballon

a) $|\vec{v}| = \sqrt{1{,}2^2 + (-1{,}8)^2 + 0{,}5^2} \approx 2{,}2$

Der Ballon bewegt sich pro Sekunde um 2,2 m.

$2{,}2\,\frac{m}{s} = 2{,}2 \cdot \frac{3600}{1000}\,\frac{km}{h} \approx 7{,}9\,\frac{km}{h}$

Die Geschwindigkeit des Ballons beträgt 7,9 km/h.

b) $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} + 120 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 232 \\ 98 \\ 159 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 144 \\ -216 \\ 601 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 376 \\ -118 \\ 219 \end{pmatrix}$

Zwei Minuten nach dem Start befindet sich der Ballon im Punkt $P_2(376\,|\,-118\,|\,219)$.

c) Der Ballon hat den Punkt Q passiert, falls es ein t gibt, sodass $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \vec{v}$ erfüllt ist.

Aus $\begin{pmatrix} 340 \\ -80 \\ 204 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 232 \\ 98 \\ 159 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ -1{,}8 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ folgt: $\left| \begin{array}{l} t = 90 \\ t \approx 98{,}89 \\ t = 90 \end{array} \right|$

Es gibt kein t, das alle drei Gleichungen erfüllt. Der Ballon hat den Punkt Q also nicht passiert.

15 Schnittpunkt zweier Geraden

a) Ansatz:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Als Gleichungssystem schreiben:

$\left| \begin{array}{r} 4t - 3s = -8 \\ t - 2s = -2 \\ -2t - s = 4 \end{array} \right|$

Lösung: $t = -2;\ s = 0$

Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $S(-6\,|\,-5\,|\,8)$.

b) Für $t = 3$ ergibt sich $P(3\,|\,1\,|\,11)$ als Punkt auf h.

Da P auf k liegt, wählt man z. B. $\overrightarrow{OP}$ als Stützvektor von k. Außerdem soll k parallel zu g sein, also wählt man z. B. den Richtungsvektor von g als Richtungsvektor von k.

Mögliche Parameterdarstellung von k:

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

16 Prisma

a) $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad E(0\,|\,3\,|\,5)$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad G(3\,|\,8\,|\,6)$

b) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel und gleich lang. Das Viereck ABCD ist also ein Parallelogramm.

Seiten- und Diagonallängen:

$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{26}$ $\qquad |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$

$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{35}$ $\qquad 26 + 9 = 35$

Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras liegt ein rechter Winkel bei A (bzw. C).

Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel ist ein Rechteck.

c) Mögliche Parameterdarstellungen:

AG: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad$ BH: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

EC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ DF: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Untersuchen, ob sich AG und BH schneiden:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

hat die Lösung $r = \frac{1}{2}$ und $s = \frac{1}{2}$. Somit schneiden sich AG und BH im Punkt $S\left(\frac{5}{2}\,\middle|\,\frac{9}{2}\,\middle|\,\frac{5}{2}\right)$.

Prüfen, ob S auf EC bzw. DF liegt:

$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ist erfüllt für $k = \frac{1}{2}$.

$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist erfüllt für $l = \frac{1}{2}$.

Alle Raumdiagonalen des Prismas schneiden sich im Punkt $S\left(\frac{5}{2}\,\middle|\,\frac{9}{2}\,\middle|\,\frac{5}{2}\right)$.