Von der Änderungsrate zum Bestand.

Änderungsraten erkennt man daran, dass die Maßeinheit ein „pro“ enthält. Änderungsraten beschreiben, wie sich eine Größe pro Zeit ändert.

- Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde
- Gewinnänderung in Euro pro Jahr
- Inzidenz in Infizierte pro Woche

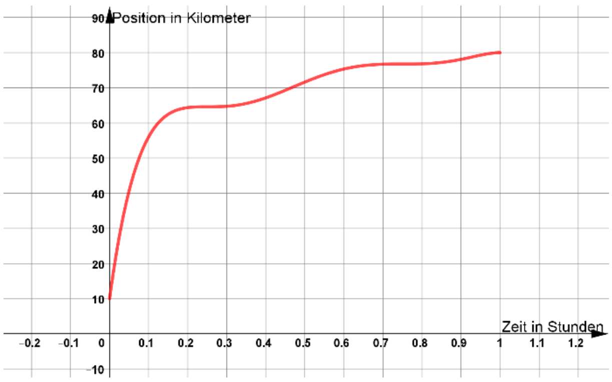
Die Größe, die sich bei einer Änderungsrate verändert, heißt Bestandsgröße oder kurz Bestand.

- Bei der Geschwindigkeit ist die Bestandsgröße die Strecke in Kilometer
- Bei der Gewinnänderung ist der Bestand der Gewinn in Euro
- Bei der Inzidenz ist der Bestand die Gesamtzahl an Infizierten.

Den Wechsel von der Änderungsrate zum Bestand haben Sie schon häufig durchgeführt, indem Sie Funktionen abgeleitet haben. Zur Festigung wiederholen wir noch einmal:

Beispiel:

Die Position eines Autos auf der Autobahn kann durch die Funktion g modelliert werden. Im Modellbereich zwischen $x = 0$ Stunden und $x = 1$ Stunde, ordnet die Funktion g jederm Zeitpunkt x in Stunden die Position $p(x)$ in Kilometer zu.



$$g(x) = \frac{-70}{23}\left(1280\,x^6 - 4608\,x^5 + 6480\,x^4 - 4480\,x^3 + 1575\,x^2 - 270\,x\right) + 10$$

Eine Geogebradatei mit allen Funktionen ist bereits hier für Sie vorbereitet.

Aufgabe

a) Berechnen Sie $g'(0{,}5)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext

$$g'(0.5) \approx 45{,}65$$

Zum Zeitpunkt $x = 0{,}5$ Stunden fährt das Auto mit einer Geschwindigkeit von $45{,}65\,\frac{km}{h}$

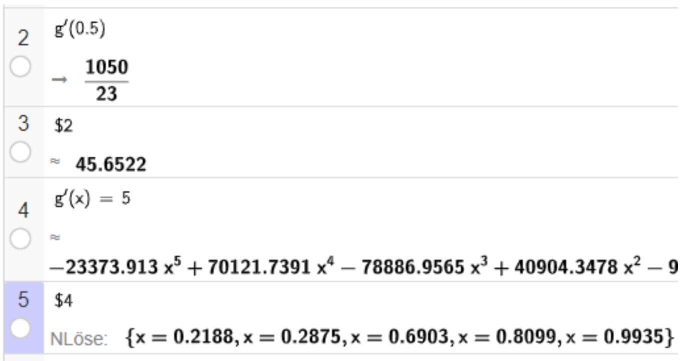
b) Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungen von $g'(x) = 5$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachkontext.

$$x_1 = 0.2188, x_2 = 0.2875, x_3 = 0.6903, x_4 = 0.8099, x_5 = 0.9935$$

Zu diesen Zeitpunkten beträgt die Geschwindigkeit des Autos nur $5\,\frac{km}{h}$.

Durch das Ableiten einer Funktion bestimmt man die Änderungsrate.

Bei diesem Beispiel ist die Maßeinheit an der x-Achse „Stunde“ und die Maßeinheit an der y-Achse „Kilometer“. Die Ableitungsfunktion liefert die Änderungsrate in „Kilometer pro Stunde“.



Ein weiteres Beispiel.

Die Funktion k modelliert für einen Zeitraum von 12 Monaten die zeitliche Entwicklung des Barkapitals einer Firma.

Die Funktion k ordnet jedem Zeitpunkt x in Monaten das Barkapital der Firma in Euro zu.

$$k(x) = \frac{-15625}{3182976}(105\,x^8 - 5520\,x^7 + 123340\,x^6 - 1532832\,x^5 + 11608800\,x^4 - 54960640\,x^3 + 159129600\,x^2 - 258048000\,x) + 1000000$$

a) Berechnen Sie $k'(5)$ und $k'(7)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachkontext.

$$k'(5) = 0$$

Zum Zeitpunkt 5 Monate ändert sich das Barkapital der Firma nicht.

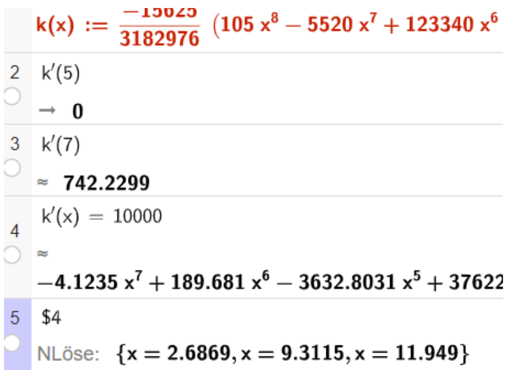
$$k'(7) \approx 742$$

Zum Zeitpunkt 7 Monate nimmt das Barkapital mit ca. 742 Euro pro Monat zu.

b) Bestimmen Sie die Lösungen von $k'(x) = 10000$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachkontext.

$$x_1 = 2.6869, x_2 = 9.3115, x_3 = 11.949$$

Zu den Zeitpunkten 2,7 Monate, 9,3 Monate und 11,9 Monate nimmt das Barkapital mit 10000 Euro pro Monat zu.



c) Im Modellzeitraum gilt $k'(x) \geq 0$ für alle Werte von x.
Interpretieren Sie diese Aussage im Sachkontext.
Die Änderungsrate wird niemals negativ. Das bedeutet, dass der Gewinn immer zunimmt oder stagniert.

Wenn man durch Ableiten von der Bestandsgröße zur Änderungsrate kommt, dann sollte durch das Bilden von Stammfunktionen von Änderungsrate zum Bestand gelangen.

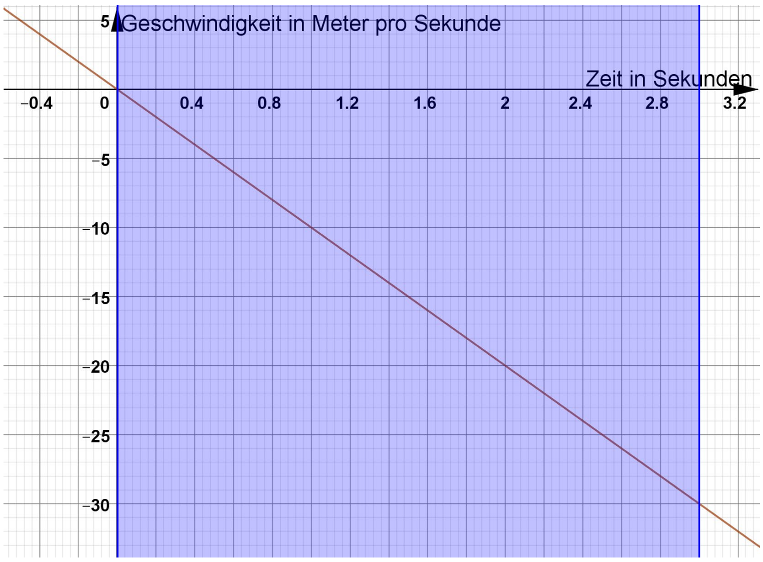
Ein Beispiel aus der Physik.

Die Geschwindigkeit eines fallenden Gegenstandes auf der Erde nimmt pro Sekunde um ca. $10\frac{m}{s}$ zu[1].

Weil die Gegenstände nach unten fallen, muss man die Geschwindigkeit negativ messen.

Die Funktion v ordnet jedem Zeitpunkt t in Sekunden die Geschwindigkeit des fallenden Gegenstandes zu.

$$v(t) = -10 \cdot t$$



[1] Der genaue Wert beträgt in Dortmund 9,81 $\frac{m}{s}$ pro Sekunde. Außerdem gilt das nur, wenn man die Luftreibung vernachlässigt. Für eine schwere Eisenkugel ist die Aussage zumindest für einen Zeitraum von 3 Sekunden gültig, für eine leichte Feder gilt das niemals.

Die Regeln für die Stammfunktionsbildung:

$a \cdot x^n \to \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$	Zum Beispiel wird aus $3x^5 \to \frac{3}{6}x^6$
$a \to a \cdot x$	Zum Beispiel wird aus $5 \to 5x$
$+C$	Zur Stammfunktion kann eine beliebige Konstante addiert werden.

Stammfunktionen bezeichnet man in der Regel mit Großbuchstaben. So bezeichnet man eine Stammfunktion zur Funktion f in der Regel mit F. Wenn man aber eine Bestandsfunktion bestimmt, ist es sinnvoll, die neue Funktion entsprechend zu bezeichnen.

Die Bedeutung des Bestandes ist in diesem Fall die Flughöhe des Steins. Die Bestandsfunktion sollte deshalb h für Höhe oder f für Flughöhe heißen.

a) Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktion v.

$$v(t) = -10 \cdot t$$

$$f(t) = -10 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 + C$$

b) Der Gegenstand wurde in einer Höhe von 15m losgelassen. Für die Bestandsfunktion müssen zwei Bedingungen gelten.
Die Bestandsfunktion ist eine Stammfunktion von v.
Für die Bestandsfunktion gilt: $f(0) = 15$
Bestimmen Sie die Bestandsfunktion!

$$f(0) = 15$$

$$-10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0^2 + C = 15$$

$$C = 15$$

$$\boldsymbol{f(t) = -5t^2 + 15}$$

Vorgehensweise bei der Bestimmung einer Bestandsfunktion:

1) Bestimmen Sie die Stammfunktionen der Änderungsrate
2) Man benötigt einen Funktionswert der Stammfunktion um die Integrationskonstante korrekt zu bestimmen.

Aufgabe

Die Funktion t modelliert den zeitlichen Verlauf der Änderungsrate der Temperatur in einem Raum.

$$t(x) = \frac{-348137533374353}{39062500000000000}x^5 + \frac{7938401022543423}{100000000000000000}x^4 - \frac{670249}{4992224}x^3 + \frac{1020271}{1059180}x^2 - \frac{2216093}{678868}x + \frac{3201608}{716277}$$

a) Geben Sie $t(1)$ an und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

$$t(1) \approx 2{,}0425$$

Zum Zeitpunkt 1 Stunde nimmt die Temperatur mit ca. 2,04 Grad Celsius pro Stunden zu.

b) Bestimmen Sie die Lösungen von $t(x) = 2$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachkontext.

$$x_1 = 1.0249, x_2 = 8.9629, x_3 = 69.5355$$

Die Lösung x_3 liegt außerhalb des Modellbereiches und kann nicht sinnvoll interpretiert werden.

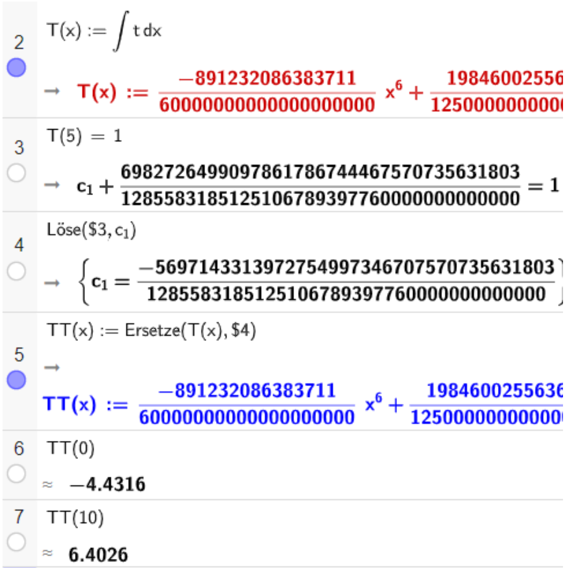
Zu den Zeitpunkt 1,02 Stunden und 8,96 Stunden nimmt die Temperatur im Raum mit $2\frac{°C}{h}$ zu.

c) Zum Zeitpunkt $x = 5h$ beträgt die Temperatur im Raum 1°C.
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung T der Bestandsfunktion.

$$T(x) = c_1 - 0.0000148538681064x^6 + 0.001587680204509x^5 - 0.03356464974328x^4 + 0.3210883261894x^3 - 1.632197275464x^2 + 4.46979031855x$$

Aus

$$T(5) = 1 | CAS$$
$$c_1 \approx -4{,}4316$$



d) Geben Sie die Temperatur im Raum zum Zeitpunkt $x = 0$ und zum Zeitpunkt $x = 10$ Stunden an.

$$T(0) = -4{,}4316$$
$$T(10) = 6{,}4026$$

Zum Zeitpunkt 0 Stunden beträgt die Temperatur im Raum -4,4316 °C und zum Zeitpunkt 10 Stunden beträgt die Temperatur 6,4026 °C