 © mag.georg wengler

Test des Erwartungswertes mit großen Stichproben

Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Stichprobe aus einer diskreten oder stetigen Grundgesamtheit, d.h. in der Stichprobe treten mehrere oder unüberschaubar viele Merkmalwerte auf. Die Stichprobe umfasse nicht weniger als n=36 Werte (dann nennt man sie groß). Wir wollen den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit prüfen.

Hypothese, Gegenhypothesen und Fragestellungen:

Wir gehen von der Nullhypothese H_0: $\mu = \mu_0$ aus. Damit wird behauptet, dass der Erwartungswert der Grundgesamtheit μ_0 sei.
Folgende drei Fragestellungen für die Gegenhypothese H_1 sind – entsprechend der Interessenslage des Auftraggebers – möglich:
a) Linkseinseitig: H_1: $\mu < \mu_0$
b) Rechtseinseitig: H_1: $\mu > \mu_0$
c) Beidseitig: H_1: $\mu \neq \mu_0$

Signifikanzniveau und Stichprobe:

Ein Signifikanzniveau α muss vorgegeben sein. Damit wird die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art (H_0 wird abgelehnt, obwohl i.W. zutreffend) gesteuert. Eine Stichprobe mit n (Stichprobenumfang) Stichprobenwerten $x_1, x_2, \dots, x_n$ wird gezogen.

Prüfgröße:

Zunächst braucht man den Mittelwert m (arithmetisches Mittel) der Stichprobenwerte:
$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (1) (= *Mittelwert[<Daten>]* in GGB)

Bei bekannter Standardabweichung σ (der Grundgesamtheit) lautet die Prüfgröße:
$z = \sqrt{n}\frac{m-\mu_0}{\sigma}$ (2a)
Ist die Standardabweichung σ nicht bekannt, wird die Schätzung s (Stichprobenstandardabweichung) herangezogen:
$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$ (3) (= *StichprobenStandardabweichung[<Daten>]* in GGB)
Die Prüfgröße lautet dann:
$z = \sqrt{n}\frac{m-\mu_0}{s}$ (2b)

Quantile für die Entscheidung mit dem Ablehnungsbereich:

Entsprechend der gegebenen Fragestellung müssen nun verschiedene Quantile der Standardnormalverteilung ermittelt werden, um die jeweiligen Ablehnungsbereiche zu erkennen:
a) Linksseitig: Quantil $z_\alpha = \Theta^{-1}(\alpha)$ (q_L= *InversNormal[0,1, α]* in GGB)
Der Ablehnungsbereich erstreckt sich von $(-\infty, q_L]$
b) Rechtsseitig: Quantil $z_{1-\alpha} = \Theta^{-1}(1-\alpha)$ (q_R = *InversNormal[0,1, 1-α]* in GGB)
Der Ablehnungsbereich erstreckt sind von $[q_R, \infty)$
c) Beidseitig. Quantile $z_{\alpha/2} = \Theta^{-1}(\alpha/2)$ und $z_{1-\alpha/2} = \Theta^{-1}(1-\alpha/2)$
(q_1 = *InversNormal[0,1, α/2]*, q_2 = *InversNormal[0,1,1-α/2]*)
Der Ablehnungsbereich besteht aus zwei Teilen, nämlich $(-\infty, q_1]$ und $[q_2, \infty)$

Entscheidung mit Ablehnungbereich:

Fällt die Prüfgröße z in den Ablehnungsbereich der betrachteten Fragestellung, dann ist die Nullhypothese H_0 zugunsten der betrachteten Gegenhypothese H_1 abzulehnen:
Die Zufallsstichprobe spricht bei dieser Gegenhypothese **signifikant** gegen die Nullhypothese.
Andernfalls gibt es keinen Grund zur Ablehnung der Nullhypothese:
Die Zufallsstichprobe spricht **nicht signifikant** gegen die Nullhypothese.

Berechnung der Überschreitungswahrscheinlichkeiten (Irrtumswahrscheinlichkeit):

Völlig gleichberechtigt für die obigen Schritte zur statistischen Entscheidung ist die Methode der Überschreitungswahrscheinlichkeit. Sie unterscheidet sich nur in der Vorgehensweise von der Entscheidung mittels Ablehnungsbereichen.
Zunächst braucht man die Überschreitungswahrscheinlichkeiten:
a) Einseitig (links- bzw. rechtsseitig): $p_1 = 1 - \phi(|z|)$ (p_1 = *1-Normal[0,1,abs(z)]* in GGB)
b) Zweiseitig (beidseitig): $p_2 = 2(1 - \phi(|z|))$ (p_2 = *2(1-Normal[0,1,abs(z)]*) in GGB)

Entscheidung mit Überschreitungswahrscheinlichkeiten:

a) Linksseitig:
Ist die Prüfgröße z negativ und die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_1 kleiner als das Signifikanzniveau α, so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden.
Die Stichprobe spricht in diesem Fall signifikant gegen H_0.
Ist dagegen z nicht negativ oder die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_1 nicht kleiner als das Signifikanzniveau α, dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von H_0.
<u>Kurz</u>:
$z < 0$ und $p_1 < \alpha$ => Ablehnung von H_0
$z \geq 0$ oder $p_1 \geq \alpha$ => Akzeptanz von H_0

b) Rechtsseitig:
Ist die Prüfgröße z positiv und die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_1 kleiner als das Signifikanzniveau α, so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden.
Die Stichprobe spricht in diesem Fall signifikant gegen H_0.
Ist dagegen z nicht negativ oder die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_1 nicht kleiner als das Signifikanzniveau α, dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von H_0.
<u>Kurz</u>:
$z > 0$ und $p_1 < \alpha$ => Ablehnung von H_0
$z \leq 0$ oder $p_1 \geq \alpha$ => Akzeptanz von H_0

c) Beidseitig:
Ist die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_2 kleiner als das Signifikanzniveau α, so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden. Die Stichprobe spricht in diesem Fall signifikant gegen H_0.
Ist dagegen die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_2 nicht kleiner als das Signifikanzniveau α, dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von H_0.
Kurz:
$p_2 < \alpha$ => Ablehnung von H_0
$p_2 \geq \alpha$ => Akzeptanz von H_0

Statt Überschreitungswahrscheinlichkeit spricht man auch von **Irrtumswahrscheinlichkeit**, weil man sich mit dieser Wahrscheinlich irrt, wenn man H_0 ablehnt.

Ist also diese Irrtumswahrscheinlichkeit sehr klein, dann ist das Risiko 1.Art (einen Fehler 1.Art zu begehen) eher gering.

siehe Beispiele Test-Erwartungswerte-links.ggb, Test-Erwartungswerte-rechts.ggb,

Test-Erwartungswert-beide.ggb:
Bei diesem Beispiel wird eine Grundgesamtheit von 1000 Zufallszahlen erzeugt mit μ und σ.
Dann wird eine Zufallsstichprobe mit n Werten gezogen und damit der Erwartungswert getestet, d.h. geschaut, inwieweit der Mittelwert der Stichprobe tauglich ist als Erwartungswert für die Grundgesamtheit.
Diese beidseitige Testung wird ergänzenderweise auch mit dem GaußTest von GGB kurz kontrolliert:
Dieser *GaußTest[<Stichprobenliste>, <σ>, <μ>, <Frage>]* liefert als Ergebnis eine Liste *{Überschreitungswahrscheinlichkeit p, Prüfgröße z}*.
Für die Entscheidung mit GaußTest gilt:
$p < \alpha$ => Ablehnung von H_0
$p \geq \alpha$ => Akzeptanz von H_0