Teoría – Tema 3

Teoría - 14 - Demostración de la regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital

Esta regla la conocemos de 1ºBachillerato. Nos permite resolver indeterminaciones en límites de cocientes que tienden a una indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to x_0$.

Regla de L'Hôpital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$, derivables en $\{(a,b)-\{x_0\}\}$, tales que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Sea $x_0 \in (a,b)$ y $g'(x) \neq 0, \ \forall \ x \in \{(a,b)-\{x_0\}\}$.

Entonces, **si existe** $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **también existe** $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ **y los límites son iguales**:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Y el resultado final del límite puede ser un valor $L \in \mathbb{R}$ o divergir a infinito.

Demostración (vamos a desarrollar $\frac{0}{0}$): Sea el intervalo arbitrario $[x_0, x] \subset [a,b]$. Si aplicamos el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de partida, sabemos que:

$$\exists c \in (x_0, x) \ / \ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

Las condiciones de partida marcan que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, con $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a,b]$. Por lo tanto:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

Sustituyendo en la expresión arrojada por el Teorema de Cauchy: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

Si aplicamos el límite por la derecha cuando $x \to x_{0+}$, como $x_0 < c < x \;\; \to \;\; c \to x_{0+}$ y por lo tanto:

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;\; \to \;\; \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si repetimos el mismo razonamiento para el intervalo arbitrario $[x, x_0] \subset [a, b]$ y aplicamos límite por la izquierda cuando $x \to x_{0-}$ obtenemos el resultado análogo:

$$\lim_{x \to x_{0-}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_{0-}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por lo tanto si existe el límite del cociente de las derivadas debe ser igual al límite del cociente de las funciones de partida:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Importante: **Si el límite del cociente de las derivadas no existe, o no se cumplen las condiciones iniciales de la Regla de L'Hôpital, no significa que no exista el límite de partida**. Deberemos aplicar **otros métodos de estudio** (sacar factor común en numerador y denominador, simplificar, infinitésimos, aplicar logaritmo para luego aplicar exponencial...) para determinar el valor final del límite.

Si tras aplicar L'Hôpital, la indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ se mantiene, y las funciones derivadas cumplen las condiciones iniciales de la regla, podemos **volver a aplicar L'Hôpital** en la resolución del nuevo límite formado por el cociente de las derivadas.

Incluso **puede ocurrir que exista el límite del cociente de dos funciones**, que se cumplan todas las condiciones iniciales de la Regla de L'Hôpital, pero **no podamos calcular el límite del cociente de las funciones derivadas.** En este caso sería un error decir que no existe el límite de partida: la conclusión de la regla L'Hôpital solo es válida si además de cumplirse las condiciones iniciales existe el límite del cociente de las funciones derivadas.

¿Un ejemplo de esto último? $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. El valor del límite es 1 y podemos resolverlo dividiendo numerador y denominador por la máxima potencia x^2 . Si no operamos así y aplicamos directamente L'Hôpital mantendremos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$; y si aplicamos L'Hôpital una segunda vez recuperamos el mismo límite de partida... Es decir, entramos en un bucle sin salida si aplicamos una y otra vez la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 1 resuelto

Comprobar que podemos aplicar la Regla de L'Hôpital a $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x}$ **y obtener el valor del límite.**

$f(x)=sen(x)$ es continua en $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ y derivable en $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ por ser función seno.

$g(x)=x$ es continua en $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ y derivable en $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ por ser polinómica.

$f(0)=sen(0)=0$

$g(0)=0$

$0\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$g'(x)=1 \quad \to \quad g'(x)\neq 0, \forall\ x\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Por lo tanto, se cumplen todas las condiciones iniciales de la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\, x}{x}=\frac{0}{0}\underset{L'Hôpital}{\to}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$