Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 5 - resolver ecuaciones

1. Resuelve la ecuación $\frac{4}{x-1}-\frac{2x-1}{1+x}=3$ **.**

Obtenemos el m.c.m. de los denominadores de la ecuación racional: $(x-1)(x+1)$

$$\frac{4(x+1)-(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=3$$

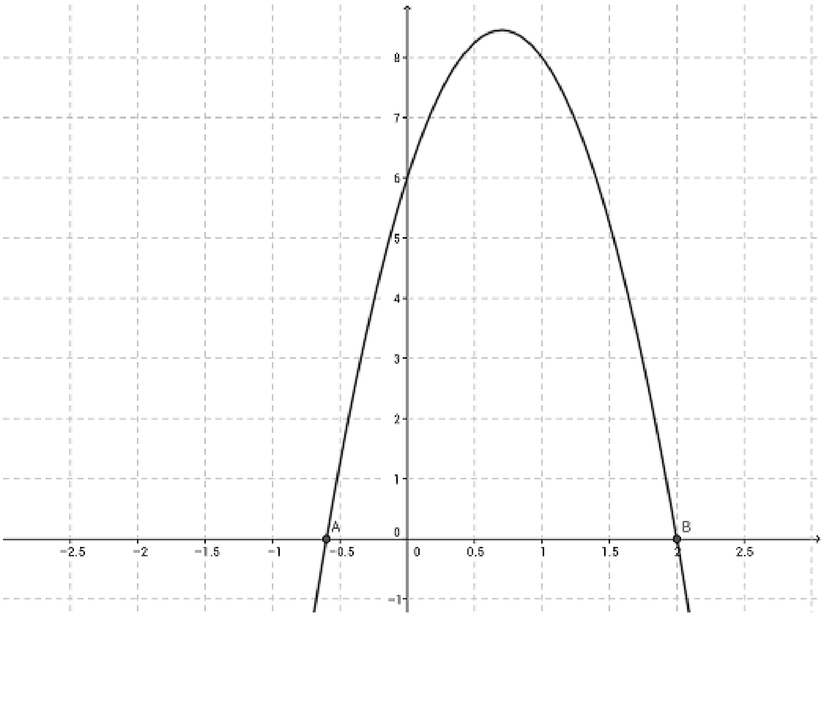
$$-5x^2+7x+6=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot(-5)\cdot 6}}{2\cdot(-5)}$$

$$x_1=\frac{-3}{5}$$

$$x_2=2$$

La pareja de valores $x_1=\frac{-3}{5}$ y $x_2=2$ satisfacen la ecuación de partida y no hacen nulo el denominador. Si representamos la parábola generada por la ecuación de segundo grado planteada, podemos ver que las soluciones son los puntos de corte de la parábola con el eje horizontal OX.



2. Halla los valores de m **para que la ecuación** $(m+1)x^2-(2m+5)x+6=0$ **tenga dos raíces, una el triple de la inversa de la otra.**

Tenemos una ecuación de segundo grado general.

$$a x^2+b x+c=0$$
$$a=m+1$$
$$b=-(2\mathrm{m}+5)$$
$$c=6$$
$$x=\frac{(2m+5)\pm\sqrt{(2m+5)^2-4(m+1)6}}{2(m+1)}$$
$$x=\frac{(2m+5)}{2(m+1)}\pm\frac{\sqrt{(2m+5)^2-4(m+1)6}}{2(m+1)}$$
$$x=\frac{(2\mathrm{m}+5)}{2(m+1)}\pm\frac{\sqrt{4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1}}{2(m+1)}$$ → tenemos dos soluciones para la variable x

$$x_1=\frac{2m+5+\sqrt{4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1}}{2(m+1)} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{2m+5-\sqrt{4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1}}{2(m+1)}$$

Del enunciado sabemos que una raíz es el triple de la inversa de la otra.

$$x_1=\frac{3}{x_2} \quad \rightarrow \quad \frac{2m+5+\sqrt{4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1}}{2(m+1)}=\frac{3}{\frac{2m+5-\sqrt{4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1}}{2(m+1)}}$$
$$\frac{(2m+5+\sqrt{4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1})(2m+5-\sqrt{4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1})}{[2(m+1)]^2}=3$$

Ojo. En el numerador aparece una identidad notable: suma por diferencia.

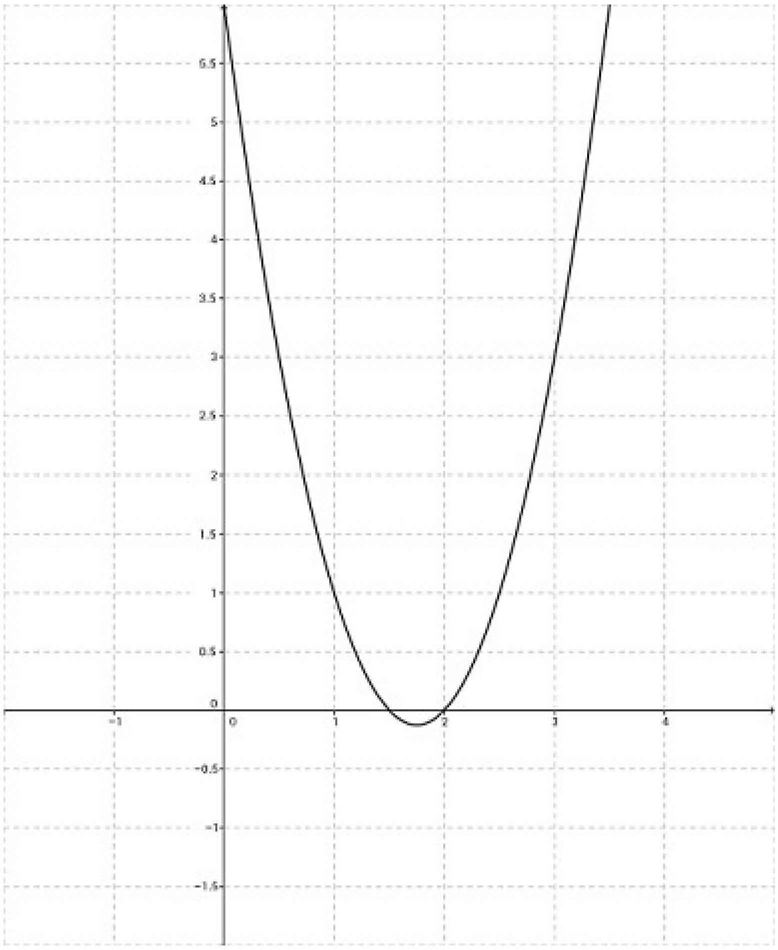
$$\frac{(2m+5)^2-(\sqrt{4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1})^2}{[2(m+1)]^2}=3 \quad \rightarrow \quad \frac{4m^2+25+20m-4m^2+4m-1}{4(m^2+1+2m)}=3$$
$$\frac{24m+24}{4m^2+8m+4}=3 \quad \rightarrow \quad 24m+24=24m^2+24m+12 \quad \rightarrow \quad 12=12m^2 \quad \rightarrow \quad m=\pm 1$$

Ojo. Como ya hemos aprendido, al obtener las soluciones de una ecuación polinómica con denominadores, debemos comprobar que las posibles soluciones no anulan ningún denominador. Si lo hacemos, veremos que $m=-1$ anula los denominadores de la ecuación de partida, por lo que no es solución.

Podemos verificar que, para $m=1$, la ecuación de partida toma dos soluciones reales que cumplen las condiciones del enunciado.

$$2x^2-7x+6=0$$
$$x_1=2$$
$$x_2=\frac{3}{2}$$

Como podemos verificar en su representación, los puntos de corte de la parábola con el eje OX son $x=\frac{3}{2}$ y $x=2$.



3. Calcula las raíces de $\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{2x-1}-2$ **.**

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=-1$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$(3x+1)+(2x-1)-2\sqrt{(3x+1)(2x-1)}=1$$
$$5x-1=2\sqrt{(3x+1)(2x-1)}$$

Volvemos a elevar al cuadrado ambos miembros.

$$25x^2+1-10x=4(6x^2-x-1)$$
$$x^2-6x+5=0$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}$$
$$x=5$$
$$x=1$$

Al sustituir estos valores en la ecuación de partida, llegamos a absurdo ya que no se cumple la igualdad de partida. Por lo tanto, concluimos que no existen soluciones pertenecientes al cuerpo de los números reales para nuestro problema.

4. Resuelve la ecuación $34-x^2=\frac{225}{x^2}$ **.**

$$x^4-34x^2+225=0$$

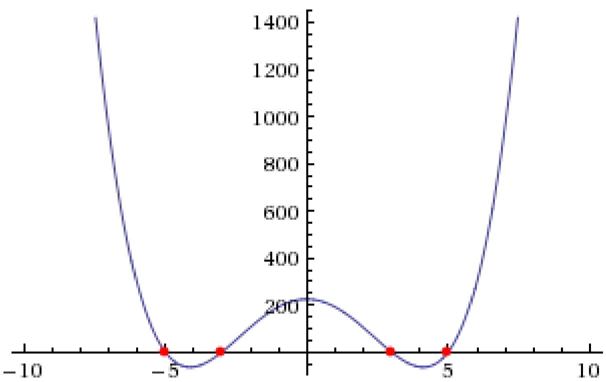
Tenemos una ecuación bicuadrática que resolvemos con el cambio de variable $t=x^2$.

$$t^2-34t+225=0$$
$$t=\frac{34\pm\sqrt{256}}{2}$$
$$t_1=25$$
$$t_2=9$$

No debemos olvidar invertir el cambio de variable realizado inicialmente, con objeto de obtener los valores de la incógnita x de partida.

$$x=\pm\sqrt{25}\rightarrow x_1=5,\quad x_2=-5$$
$$x=\pm\sqrt{9}\rightarrow x_3=3,\quad x_4=-3$$

Cuatro soluciones para una ecuación polinómica de cuarto grado que presenta, como puede verse en la gráfica, tres extremos relativos (n -1, siendo n el grado del polinomio).



5. Calcula las raíces de $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$

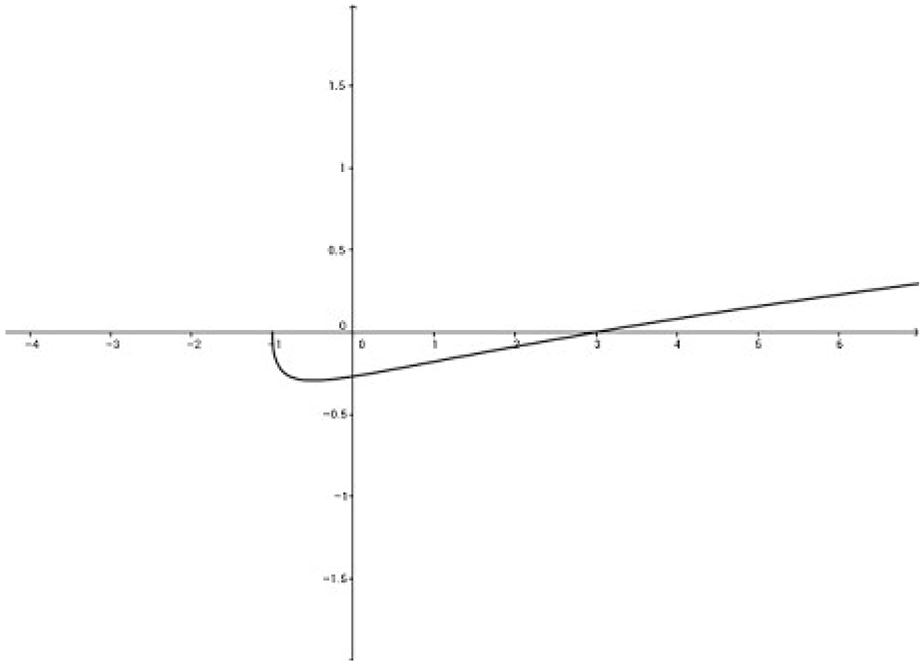
Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$(2x+3)+(x+1)-2\sqrt{(2x+3)(x+1)}=1$$
$$3x+3=2\sqrt{(2x+3)(x+1)}$$

Volvemos a aplicar cuadrados en ambos miembros de la igualdad.

$$9x^2+18x+9=4(2x^2+5x+3)$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$$
$$x_1=3$$
$$x_1=-1$$

Ambas soluciones satisfacen la ecuación de partida y no hacen negativos los discriminantes de las raíces, por lo que son soluciones válidas a nuestro problema (como podemos ver en los cortes con el eje horizontal de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1$).



6. Halla los valores de m para que la ecuación $x^2-(2m+1)x+(3m+1)=0$ tenga una raíz 3 unidades superior que la otra. Calcula las raíces de dicha ecuación.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a=1$$
$$b=-(2\text{m}+1)$$
$$c=3\text{m}+1$$
$$x=\frac{(2m+1)}{2}\pm\frac{\sqrt{4m^2-8m-3}}{2}$$
$$x_1=\frac{(2m+1)}{2}+\frac{\sqrt{4m^2-8m-3}}{2}$$
$$x_2=\frac{(2m+1)}{2}-\frac{\sqrt{4m^2-8m-3}}{2}$$

Por las condiciones del enunciado sabemos que la diferencia entre las dos raíces debe ser 3 unidades.

$$x_1=x_2+3$$
$$\sqrt{4m^2-8m-3}=3$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$m^2-2m-3=0$$
$$m_1=-1\rightarrow x_1=1, x_2=-2$$
$$m_2=3\rightarrow x_1=2, x_2=5$$

Para cada valor de m obtenemos una pareja de soluciones válidas para nuestra ecuación de partida.

Si hubiésemos planteado la segunda menos la primera solución:

$x_2-x_1=3 \quad \rightarrow \quad -\sqrt{4\text{m}^2-8\text{m}-3}=3$ → lo cual no es posible por ser 3 un factor positivo

7. Resuelve $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x+16}}{3}$.

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x+16}}{3} \rightarrow \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{x+16}}{3}\right)^2 \rightarrow x+\frac{1}{x}+2=\frac{4(x+16)}{9}$$

$$\frac{x^2+1+2x}{x}=\frac{4x+64}{9} \rightarrow 9x^2+9+18x=4x^2+64x \rightarrow 5x^2-46x+9=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado, y las soluciones resultan:

$$x=\frac{46\pm 44}{10} \rightarrow x=9 \quad , \quad x=\frac{1}{5}$$

Ambas soluciones satisfacen la igualdad de partida.

8. Halla el valor de m para que la ecuación $x^2-m^2x+m^2+9=0$ tenga una raíz el doble de la otra.

Para solucionar este ejercicio voy a valerme de las dos propiedades de Vieta que cumplen las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $a x^2+b x+c=0$:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$$
$$x_1 x_2=\frac{c}{a}$$

En nuestro problema: $a=1 , b=-m^2 , c=m^2+9$

Una vez tenemos claras ambas propiedades, establecemos la relación entre x_1 y x_2 asignándoles una variable común que cumpla la condición del enunciado: una solución es la doble de la otra.

$$x_1=k$$
$$x_2=2k$$

Hecho esto, colocamos nuestras nuevas variables en las fórmulas de las propiedades anteriores:

$$k+2k=m^2$$
$$k\cdot 2k=m^2+9$$

Tenemos un sistema con dos incógnitas. Lo resolveré por el método de sustitución.

$k+2k=m^2 \rightarrow m^2=3k$ → llevamos este resultado a la segunda ecuación del sistema

$$k\cdot 2k=3k+9$$
$$2k^2-3k-9=0$$
$$k=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-9)}}{2\cdot 2}$$
$$k=\frac{3\pm 9}{4}$$
$$k_1=3 ; k_2=\frac{-3}{2}$$

Ahora que tenemos k podemos calcular m deshaciendo el cambio.

$$m^2=9\rightarrow m_1=3 ; m_2=-3$$

No usamos el resultado negativo $m^2=-3/2$ por no existir el número real cuyo cuadrado sea negativo.

9. Resuelve $\sqrt{4x+9}+\sqrt{x-6}=\sqrt{8x+1}$ **.**

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$(\sqrt{4x+9}+\sqrt{x-6})^2=(\sqrt{8x+1})^2 \rightarrow 4x+9+x-6+2\sqrt{(4x+9)(x-6)}=8x+1$$
$$5x+3+2\sqrt{(4x+9)(x-6)}=8x+1 \rightarrow 2\sqrt{(4x+9)(x-6)}=3x-2$$
$$2\sqrt{4x^2-15x-54}=3x-2$$

Volvemos a elevar al cuadrado.

$$4\cdot(4x^2-15x-54)=(3x-2)^2 \rightarrow 16x^2-60x-216=9x^2+4-12x \rightarrow -7x^2+48x+220=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$x=\frac{-48\pm\sqrt{48^2+4\cdot7\cdot220}}{-14} \rightarrow x=\frac{-48\pm92}{-14} \rightarrow x=10 \quad , \quad x=\frac{-22}{7}$$

El valor negativo $x=\frac{-22}{7}$ hace negativo el discriminante de la raíz $\sqrt{4x+9}$ .Por lo tanto, la única solución válida es $x=10$, que satisface la ecuación de partida.

10. Resuelve $\frac{2x}{x-3}-\frac{x+5}{x+3}-\frac{2x-7}{9-x^2}=0$ **.**

Factorizamos el tercer denominador. Ojo con el signo negativo que sale como factor común.

$$9-x^2=-(x^2-9)=-(x-3)(x+3)$$

Sustituimos en el tercer denominador.

$$\frac{2x}{x-3}-\frac{x+5}{x+3}+\frac{2x-7}{(x-3)(x+3)}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x(x+3)-(x+5)(x-3)+2x-7}{(x-3)(x+3)}=0$$

$$\frac{x^2+6x+8}{(x-3)(x+3)}=0 \quad \rightarrow \quad x^2+6x+8=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2} \quad \rightarrow \quad x=-2 \quad , \quad x=-4$$

Son soluciones válidas porque no anulan ninguno de los denominadores de partida.

11. Resuelve $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+8}-1}=\frac{5}{3(\sqrt{x+1}+2)}$.

Eliminamos las fracciones multiplicando cada numerador por el denominador del otro miembro:

$$3(\sqrt{x+1}+2)\cdot(\sqrt{x+1}-2)=5\cdot(\sqrt{x+8}-1)$$

Producto notable del primer término de la igualdad: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

$$3x-9=5\sqrt{x+8}-5$$
$$3x-4=5\sqrt{x+8}$$

Elevo todo al cuadrado para quitar la raíz:

$$(3\text{x}-4)^2=(5\sqrt{x+8})^2 \rightarrow 9x^2+16-24x=25(x+8) \rightarrow 9x^2-49x-184=0$$

Resuelvo la ecuación.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=\frac{49\pm\sqrt{49^2-4\cdot9\cdot184}}{18} \rightarrow x=\frac{49\pm\sqrt{2401+6624}}{18}$$
$$x=\frac{49\pm\sqrt{9025}}{18} \rightarrow x=\frac{49\pm95}{18}$$

$x=\frac{-46}{18}=-2{,}55 \Rightarrow$ → solución no válida por hacer negativo el discriminante de $\sqrt{x+1}$

$x=\frac{144}{18}\Rightarrow x=8$ → Solución correcta

La solución $x=8$ resuelve la ecuación, no anula ningún denominador de partida y garantiza que los discriminantes sean positivos.

12. Calcula el valor de m en la ecuación $x^2+mx-(m^2+1)=0$ sabiendo que sus raíces se diferencian en 3 unidades.

$$x^2+mx-(m^2+1)=0 \rightarrow a=1 \ , \ b=m \ , \ c=-(m^2+1) \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+4(m^2+1)}}{2} \rightarrow x=\frac{-m\pm\sqrt{5m^2+4}}{2}$$

$$x_1=\frac{-m+\sqrt{5m^2+4}}{2} \ , \ x_2=\frac{-m-\sqrt{5m^2+4}}{2} \rightarrow x_1-x_2=3$$

Sustituimos.

$$\frac{-m+\sqrt{5m^2+4}}{2}-\frac{-m-\sqrt{5m^2+4}}{2}=3 \rightarrow \frac{2\sqrt{5m^2+4}}{2}=3 \rightarrow \sqrt{5m^2+4}=3 \rightarrow 5m^2+4=9$$

$$5m^2=5 \rightarrow m=\pm 1$$

Si $m=1 \rightarrow x_1=1 \ , \ x_2=-2$

Si $m=-1 \rightarrow x_1=2 \ , \ x_2=-1$

Si hubiéramos restado a la segunda solución la primera, tendríamos:

$x_2-x_1=3 \rightarrow -\sqrt{5m^2+4}=3$ → Lo cual no es posible, por ser 3 un factor positivo

13. Resuelve $\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}+\frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$

Aplicamos mínimo común múltiplo.

$$\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}}+\frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2} \rightarrow \frac{4x+36+x-12\sqrt{x}}{(6-\sqrt{x})2\sqrt{x}}=\frac{5}{2} \rightarrow \frac{5x+36-12\sqrt{x}}{12\sqrt{x}-2x}=\frac{5}{2}$$

$$10x+72-24\sqrt{x}=60\sqrt{x}-10x \rightarrow 20x+72=84\sqrt{x}$$

Elevamos ambos términos al cuadrado.

$$400x^2+5184+2880x=7056x \rightarrow 400x^2-4176x+5184=0$$

Simplifico dividiendo por 2 .

$$200x^2-2088x+2592=0 \rightarrow x=\frac{2088\pm\sqrt{2088^2-4\cdot 200\cdot 2592}}{400}$$

$$x=\frac{2088\pm 1512}{400} \rightarrow x=9 \quad , \quad x=\frac{36}{25}$$

Ninguna de estas soluciones hace negativo el discriminante de las raíces de partida, y satisfacen la ecuación de partida. Ambos valores son solución.

14. Resuelve $\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+7}=-1$ **.**

$$\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+7}-1 \rightarrow 2x+3=3x+7+1-2\sqrt{3x+7} \rightarrow 2\sqrt{3x+7}=3x+8-2x-3$$

$$\sqrt{3x+7}=\frac{x+5}{2} \rightarrow 3x+7=\frac{x^2+25+10x}{4} \rightarrow 12x+28=x^2+25+10x \rightarrow -x^2+2x+3=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$$

Ambas soluciones satisfacen la ecuación inicial y no hacen negativo los discriminantes de las raíces.

15. Calcular m para la ecuación $x^2-(m-3)x-2m+2=0$ sabiendo que las raíces se diferencian en cinco unidades.

Si comparamos $x^2-(m-3)x-2m+2=0$ con la expresión general de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a=1$$
$$b=-(m-3)$$
$$c=-2m+2$$

Resolvemos.

$$x=\frac{m-3\pm\sqrt{(m-3)^2-4(-2m+2)}}{2} \rightarrow x=\frac{m-3\pm\sqrt{m^2+9-6m+8m-8}}{2}$$

$$x=\frac{m-3\pm\sqrt{m^2+2m+1}}{2} \rightarrow x=\frac{m-3\pm\sqrt{(m+1)^2}}{2}$$

$$x=\frac{m-3\pm(m+1)}{2}=\begin{pmatrix}\frac{m-3+(m+1)}{2}=\frac{2m-2}{2}=m-1\\ \frac{m-3-(m+1)}{2}=-2\end{pmatrix}$$

Si restamos la primera solución menos la segunda e igualamos la diferencia a 5. Planteamos las dos posibles diferencias.

$$m-1-(-2)=5 \rightarrow m-1+2=5 \rightarrow m=4$$

Si $m=4$ las soluciones son → $x=-2,3$

Si restamos la segunda solución menos la primera e igualamos la diferencia a 5:

$$(-2)-(m-1)=5 \rightarrow -1-m=5 \rightarrow m=-6$$

Si $m=-6$ las soluciones son → $x=-7,-2$

16. Resuelve.

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{2}=\frac{17}{6}$$

Sacamos común denominador en el miembro de la izquierda y hallamos los numeradores correspondientes.

$$\frac{2}{(x^2-1)\cdot 2}+\frac{x^4-1}{(x^2-1)\cdot 2}=\frac{17}{6}$$ → multiplicar en cruz → $6\cdot(2+x^4-1) = 17 \cdot (x^2-1) \cdot 2$

Operamos.

$$12+6x^4-6=34x^2-34 \rightarrow 6x^4-34x^2+40 = 0$$

Sustituimos $x^2=t$, de manera que nos quedará una ecuación de segundo grado.

$$6t^2-34t+40 = 0$$

Utilizamos la fórmula de las ecuaciones de segundo grado.

$$t=\frac{34\pm\sqrt{34^2-(4\cdot 6\cdot 40)}}{2\cdot 6} \rightarrow t=\frac{34\pm\sqrt{196}}{12} \rightarrow t=\frac{34\pm 14}{12} \rightarrow t= 4 \ , \ \frac{5}{3}$$

Deshacemos el cambio de variable → $x=\pm 2 \ , \ \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

Los cuatros valores satisfacen la ecuación de partida.

17. Encuentra una ecuación bicuadrática cuyas raíces sean:

a) $2,-2,3,\frac{1}{3}$

b) $1,2$

a) Una ecuación bicuadrática general del tipo $a x^4+b x^2+c=0$ se resuelve planteando el cambio de variable $t=x^2$.

De esta forma las soluciones para t cumplen $t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, por lo que t toma $1\ o\ 2$ valores solución distintos como máximo.

Asimismo, al deshacer el cambio de variable, las soluciones para x cumplen $x=\pm\sqrt{t}$, por lo que x toma $2\ o\ 4$ valores solución distintos como máximo. Y si son 4 soluciones distintas, se diferencian en el signo dos a dos (iguales en módulo y con signo opuesto).

El apartado *a)* plantea 4 soluciones distintas, donde $2,-2$ son iguales en módulo pero con signo opuesto. Sin embargo los valores $3,\frac{1}{3}$ no son iguales en módulo ni tienen signo opuesto.

Por lo tanto, llegamos a un absurdo. Podemos concluir que no existe ninguna ecuación bicuadrática cuyas cuatro raíces reales puedan ser $2,-2,3,\frac{1}{3}$.

b) Si $1,2$ son soluciones del polinomio $P(x)=ax^4+bx^2+c$ satisfacen:

$$P(1)=0$$
$$P(2)=0$$

Por lo tanto:

$$P(1)=a+b+c=0$$
$$P(2)=16a+4b+c=0$$

Tendremos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que gozamos de un grado de libertad para dar, arbitrariamente, un valor no nulo a alguna de las incógnitas. Por ejemplo:

$$a=1$$

De esta forma nuestro sistema se reduce a:

$$\begin{Bmatrix} b+c=-1 \\ 4b+c=-16 \end{Bmatrix}$$

De la primera ecuación despejamos $c=-1-b$, que sustituimos en la segunda.

$$3b=-15$$
$$b=-5\rightarrow c=4$$

De esta forma el polinomio $P(x)=x^4-5x^2+4$ satisface las condiciones del enunciado, como podemos verificar en la siguiente gráfica.