

# EMT untuk geometri

Vina Alfiyatu Rizqo  
23030130051  
Pendidikan Matematika C

## Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

### Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektor v dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.
```

$ax+by=c$ .

```
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g): titik pada garis g
perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g): garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B): jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C): besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c): pusat lingkaran c
getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkaran c
circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan c2
planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
```

y dengan titik A pada sisi positif (kanan/atas) garis

```
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni  $\sin(\alpha)^2$  dengan  $\alpha$  sudut yang
menghadap sisi a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang membentuk suatu segitiga
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread  $2\phi$ , dengan  $sa=\sin(\phi)^2$  spread a.
```

### Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang, tetapkan tiga titik dan plotlah.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format garisnya adalah [a,b,c] yang mewakili garis dengan persamaan  $ax+by=c$ .

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1, 2, 2]
```

Compute the perpendicular line through A on BC.

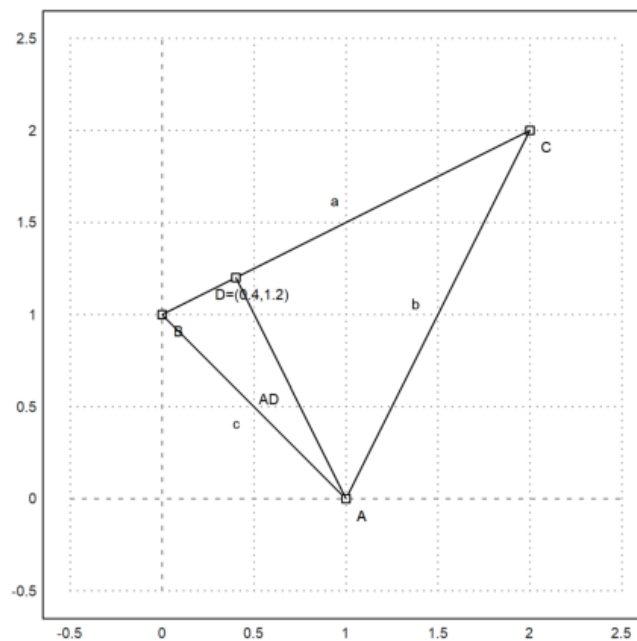
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

And its intersection with BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot that.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D); // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

1.5

Cara lain menghitung luas segitiga ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

1.5

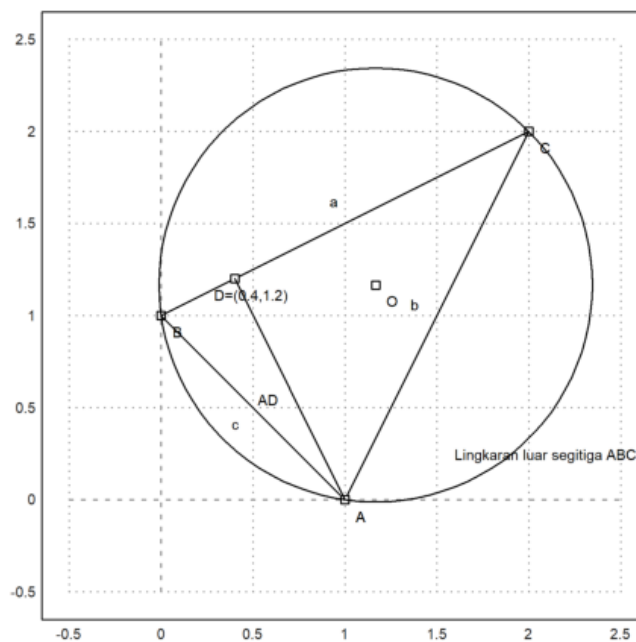
Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang, lingkarilah segitiga tersebut.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667, 1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

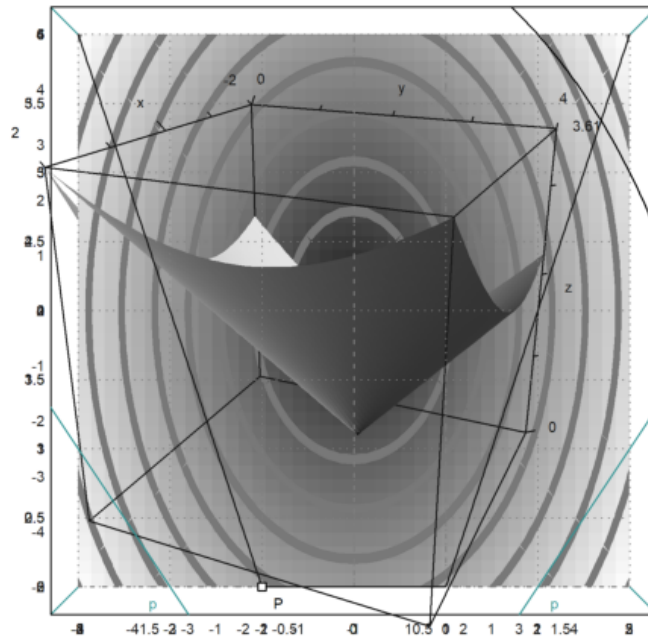
```
[0.86038, 0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

5

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```



## Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>reset
```

```
0
```

```
>setPlotRange(0,3,0,3);
>A=[1.5,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[0,1.5]; plotPoint(B,"B");
>C=[2.5,2]; plotPoint(C,"C");
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut

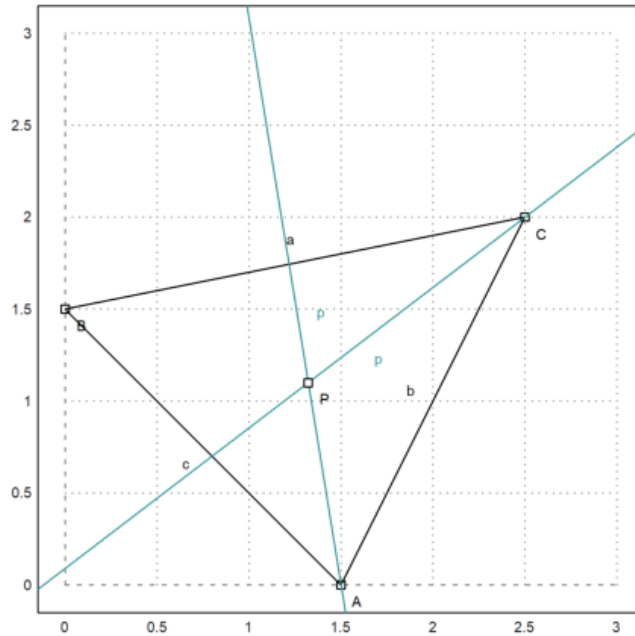
```
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
```

3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

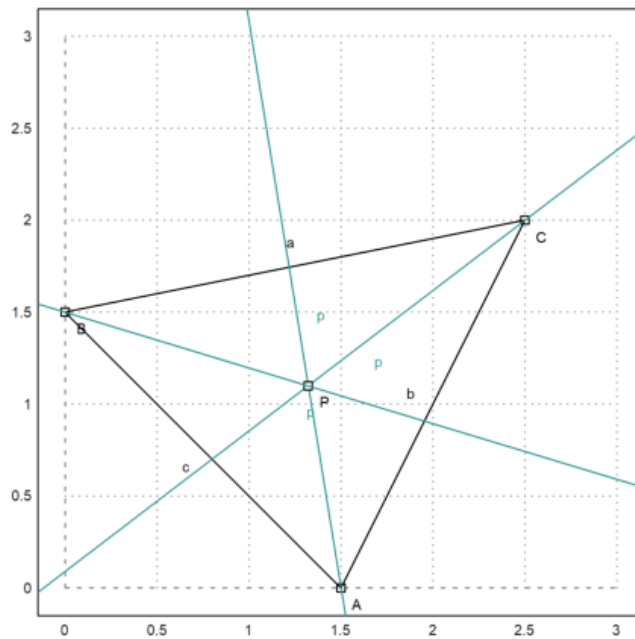
```
>g=angleBisector(C,A,B);
>l=angleBisector(A,C,B);
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[1.32151, 1.09988]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P");
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC");
```



```
>j=angleBisector(A,B,C);
>color(5); plotLine(j);
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```



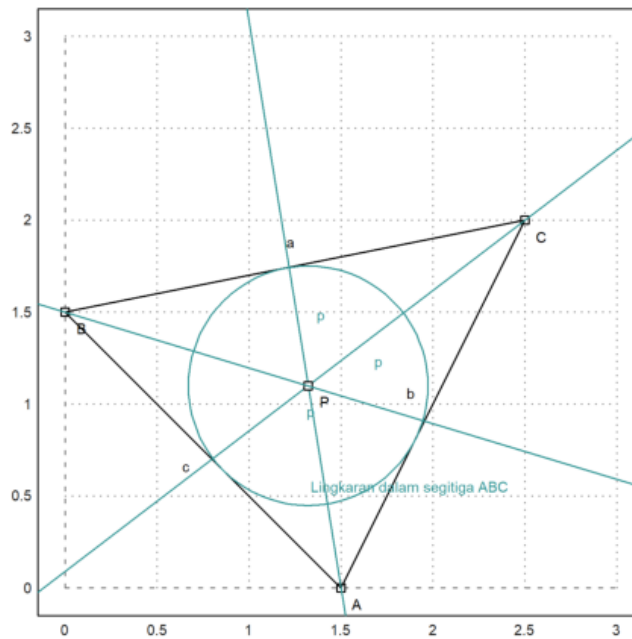
Jadi, terbukti bahwa garis bagi sudut ketiga juga melalui titik pusat lingkaran

4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
0.651522571967
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```



## Contoh 2 : Geometri Simbolik

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi garis dan lingkaran berfungsi sama seperti fungsi Euler, namun menyediakan komputasi simbolik.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

$$[-1, 2, 2]$$

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%y) | expand // persamaan garis c
```

$$2y - x = 2$$

$$\left[ y = \frac{x}{2} + 1 \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$(x_1 - 1)y - x y_1 = -y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

$$[2, 1, 2]$$

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ - & - \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[ \frac{2}{5}, \frac{6}{5} \right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc := circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[ \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}} \right]$$

```
>r:=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

1.178511301977579

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P := lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi sudut
```

$$\left[ \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6} \right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

[0.86038, 0.86038]

## Perpotongan Garis dan Lingkaran

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

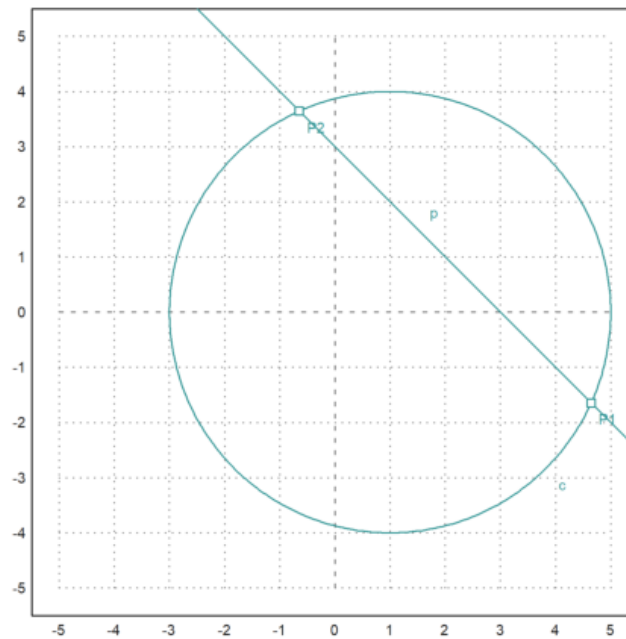
```
>A := [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B := [1,2]; C := [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2,
```

[4.64575, -1.64575]  
[-0.645751, 3.64575]

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



The same in Maxima.

```
>c := circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l := lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

```
[[[sqrt(7)+2, 1-sqrt(7)], [2-sqrt(7), sqrt(7)+1]]]
```

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

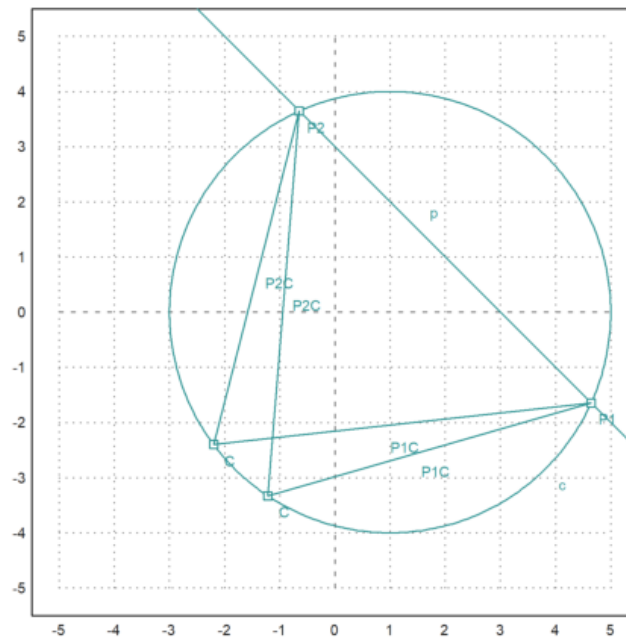
```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>insimg;
```



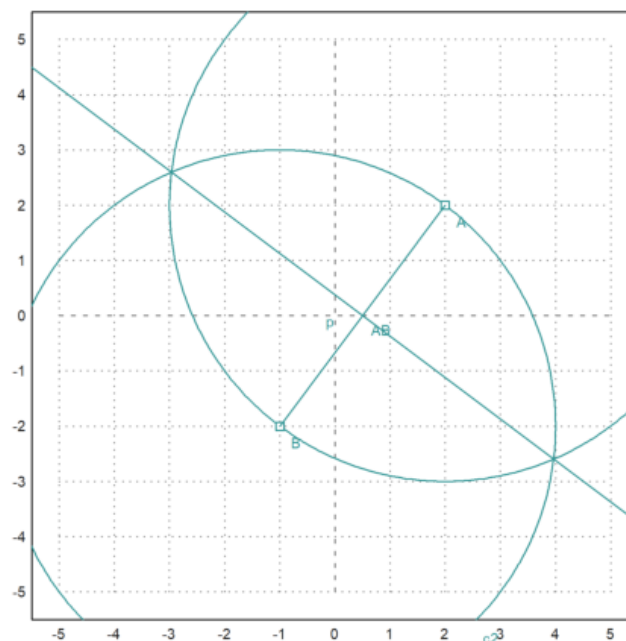


### Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melalui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
```



Selanjutnya kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tapi kita bisa menyederhanakannya jika kita mencari y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[ y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

Ini memang sama dengan garis tengah tegak lurus, yang dihitung dengan cara yang sangat berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[ y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

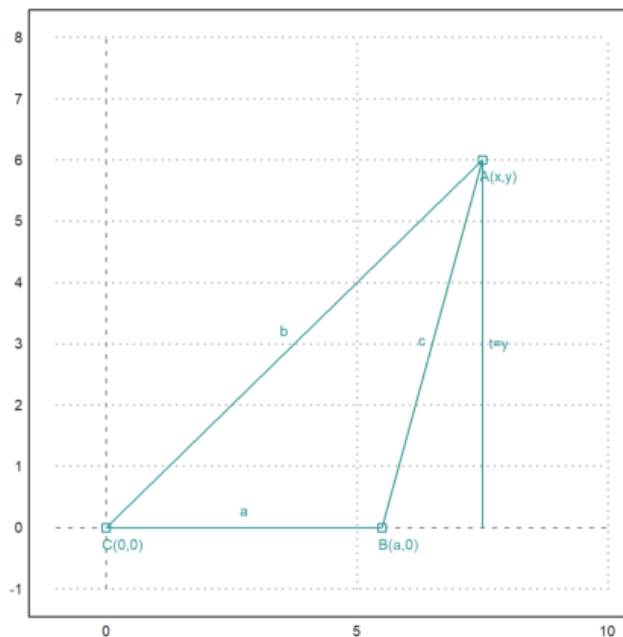
```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[ y = \frac{(b_2 - a_2)x - a_1b_2 + a_2b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

Artinya kedua garis tegak lurus.

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...
  plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...
  plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...
  plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6], "c",15); ...
  plotSegment([0,0],[7.5,6], "b",25);
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6], "c",15); ...
  plotSegment([0,0],[7.5,6], "b",25);
> ...
  plotSegment([7.5,6],[7.5,0], "t=y",25):
```



```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x,y])
```

[ ]

### Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

```
> &assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x,y])
```

```
Closing bracket missing.
Found: solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x, y])
Brackets: 1 (, 0 [
Error in:
... sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x, y]) ...
```

>)

```
Syntax error in expression, or unfinished expression!
Error in:
) ...
^
```

```
> ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2)) ...
^
```

```
>&assume(a>0);sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x, y])
```

```
Space between commands expected!
Found: sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x, y]) (character 115)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
&assume(a>0);sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x, y]) ...
^
```

Extract the solution y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $ysol
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
ysol &= y with sol[2][2]; $ysol ...
^
```

We get the Heron formula.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H(a, b, [1, 0, 4]) = \frac{a |ysol|}{2}$$

Tentu saja, setiap segitiga siku-siku adalah kasus yang terkenal.

```
> $'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

$$Luas = |ysol|$$

Of course, each rectangular triangle is a well known case.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
  useglobal; return a*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
^
```

Dan jelas juga bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```

```

Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
%ploteval:
  y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
  s=%ploteval(g$,t,args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
  dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args();

```

The general case works too.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```

Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

```

```

Error in:
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
      ^

```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana  $b+c=d$  untuk suatu konstanta  $d$ . Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```

Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

```

```

Error in:
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...
      ^

```

And make functions of this.

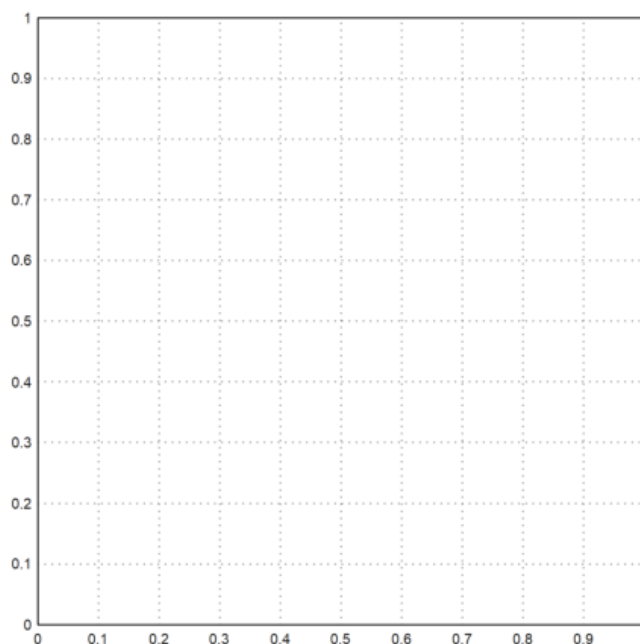
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

0

0

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi  $b$  bervariasi dari 1 sampai 4. Diketahui bahwa kita memperoleh elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum elips ini, yaitu :

dimana  $(x_m, y_m)$  adalah pusat, dan  $u$  dan  $v$  adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{5a^2}{4u^2 - 4u + 1}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk  $x=0$ . Jadi luas segitiga dengan  $a+b+c=d$  adalah maksimal jika segitiga tersebut sama sisi. Kami ingin memperolehnya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[ \frac{a \text{ysol}^2}{2} = 0, 0 = 0 \right]$$

Kita mendapatkan nilai minimum yang dimiliki oleh segitiga dengan salah satu sisinya 0, dan solusinya  $a=b=c=d/3$ .

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$[[a = 0, b = \%r_1]]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan  $H(a,b,c)^2$  terhadap  $a+b+d=d$ .

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
... la, diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la) ...
```

We can make a plot of the situation

First set the points in Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0,0]$$

$$[a,0]$$

Then set the plot range, and plot the points.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
a=4; b=3; c=2; ...
plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
plotPoint(mxmeval("A"),"A");
```

```
Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
return evaluate(mxm(s));
Error in:
... otPoint(mxmeval("C"),"C"); plotPoint(mxmeval("A"),"A"); ...
```

Plot the segments.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A"));
```

```

Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
  return evaluate(mxm(s));
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
^

```

Hitung garis tengah tegak lurus di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkarannya.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kita mendapatkan rumus jari-jari lingkaran luar.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{a_2^2 + a_1^2} \sqrt{a_2^2 + a_1^2 - 2 a a_1 + a^2}}{2 |a_2|}$$

Let us add this to the plot.

```
>plotPoint(U()); ...
plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

```

Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2,(a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
^

```

Dengan menggunakan geometri, kita memperoleh rumus sederhana

untuk radius. Kita bisa cek, apakah ini benar adanya pada Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2 | factor
```

$$\left[ \frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2}, 0, \frac{16 (a_2^2 + a_1^2)}{a_2^2} \right]$$

## Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, antara lain ortocenter, sirkumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasinya, kita menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

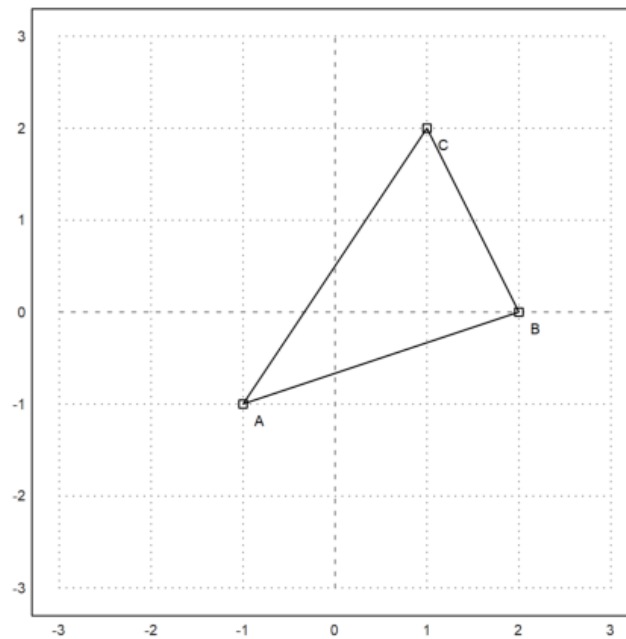
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menjumlahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,"");
```



Berikut luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja kami harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan dapatkan juga rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari Hesseform. Memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%, [x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

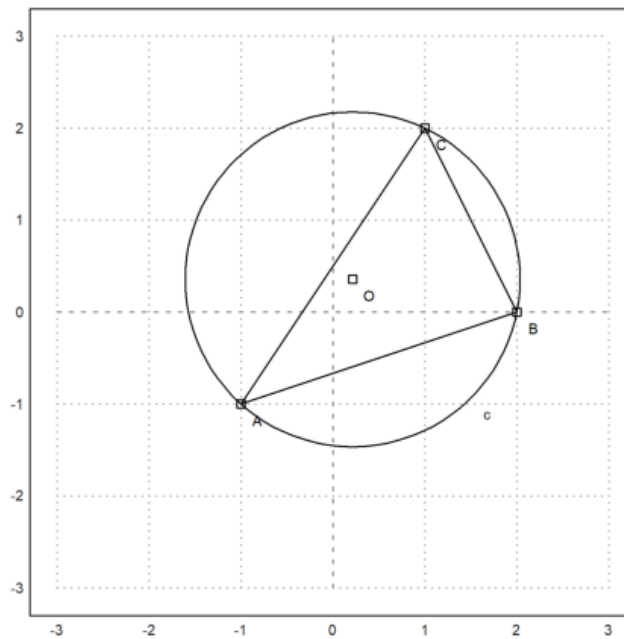
$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U bersifat simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(), "O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (ortocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[ \frac{11}{7}, \frac{2}{7} \right]$$

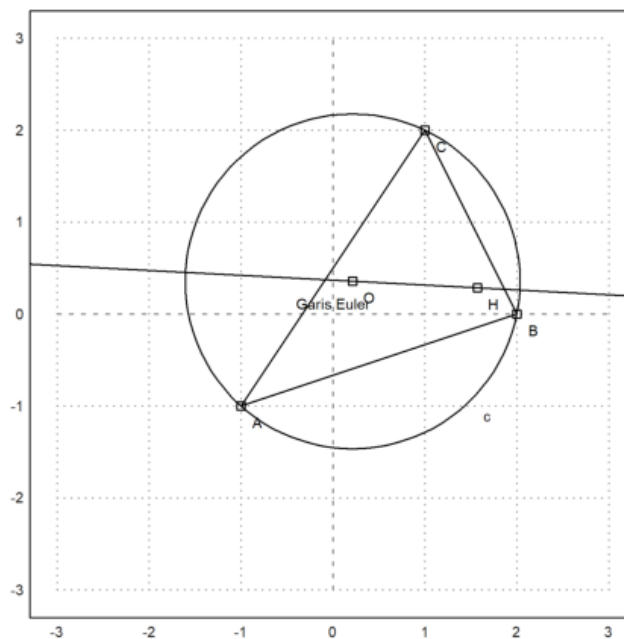
Sekarang kita dapat menghitung garis segitiga Euler.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Add it to our plot.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```



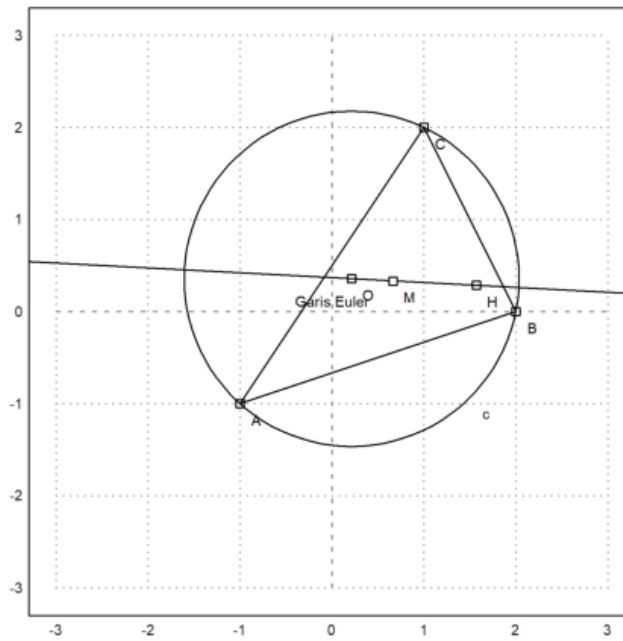
Pusat gravitasi seharusnya berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```



$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teorinya memberitahu kita  $MH=2*MO$ . Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

2

Fungsinya mencakup fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%)
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

60°15'18.43''

Persamaan pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[ \frac{\left(2^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sqrt{5} \sqrt{13} - 15 \sqrt{2} + 3}{14}, \frac{(\sqrt{2} - 3) \sqrt{5} \sqrt{13} + 5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + 5}{14} \right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

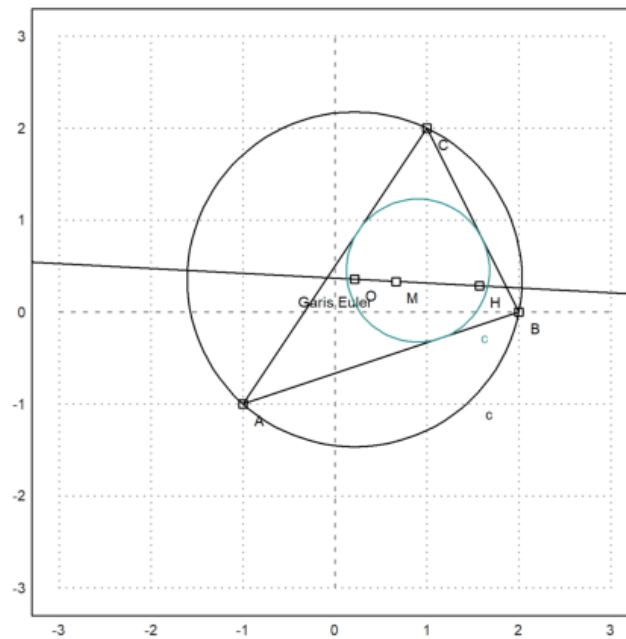
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{(-41\sqrt{2} - 31) \sqrt{5} \sqrt{13} + 115\sqrt{2} + 614}}{7\sqrt{2}}$$

```
>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Let us add this to the plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



## Parabola

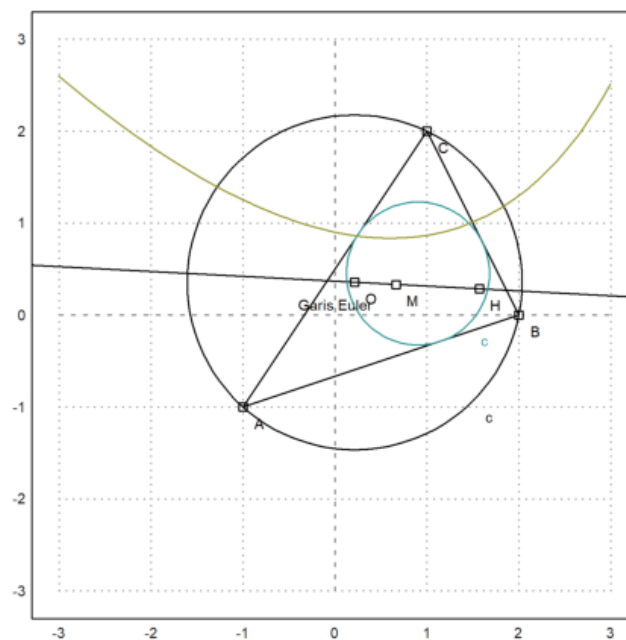
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B), x, y, C) - distance([x, y], C); $p='0
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2 - y)^2 + (1 - x)^2} = 0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p, level=0, add=1, contourcolor=6):
```



Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B), x, y, C)^2 - distance([x, y], C)^2, y)
```

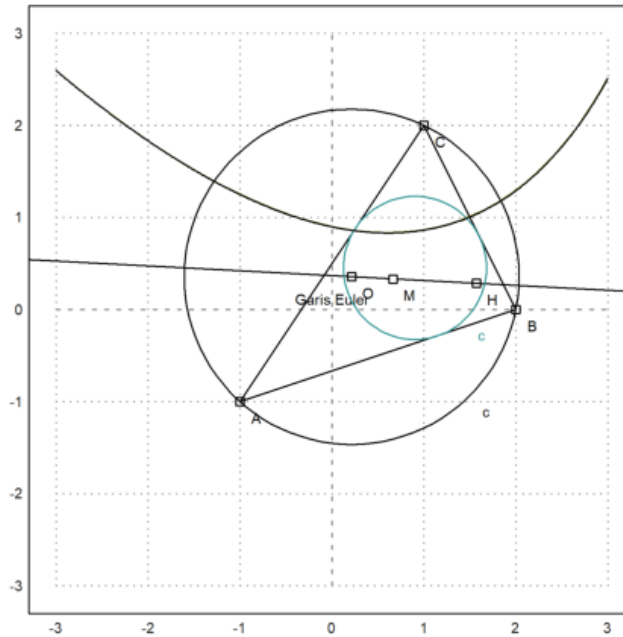
$$\begin{aligned} [y = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26, \\ y = -3x + \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26] \end{aligned}$$

The first solution is

maxima: akar[1]

Menambahkan solusi pertama pada plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teorinya memberitahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```



```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

2.135605779339061

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[ \frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

$$\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

2.135605779339061

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

## Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Divine Proportions", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadran dan penyebaran. Dengan menggunakan hal ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

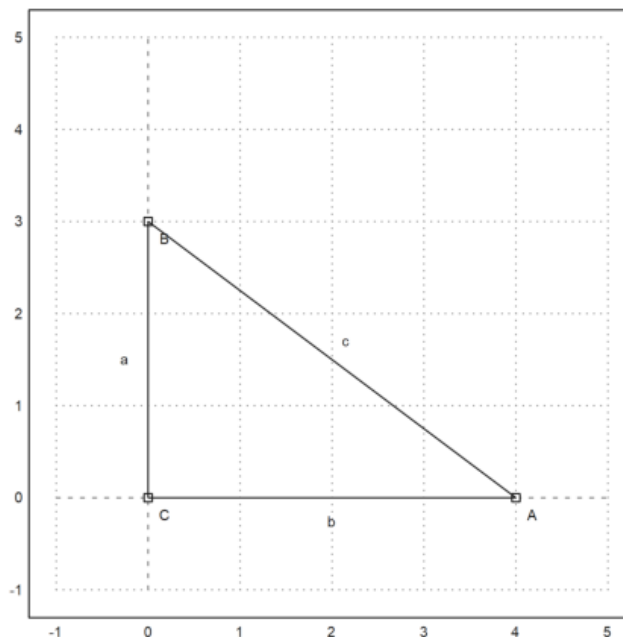
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keunggulan utama trigonometri rasional yaitu perhitungan hanya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah perhitungan rasional simbolik seringkali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga siku-siku dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
insimg(30);
```



Of course,

dimana  $w_a$  adalah sudut di A. Cara umum untuk menghitung sudut ini adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara kasar.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama tentang trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah jarak yang dikuadratkan. Di bawah ini, a, b, dan c menyatakan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythagoras menjadi  $a+b=c$ .

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

```
25 = 25
```

Pengertian trigonometri rasional yang kedua adalah penyebaran. Penyebaran mengukur pembukaan antar garis. Nilainya 0 jika garisnya sejajar, dan 1 jika garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.

Luas garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

dimana a dan c adalah kuadran suatu segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya berada di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja ini lebih mudah dihitung daripada sudutnya. Namun Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan sudut  $w_a$  menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

9/25

Hukum kosinus trigonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

Di sini a, b, dan c adalah kuadran sisi-sisi segitiga, dan sa adalah jarak di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berhadapan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diterapkan dalam file geometri.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[ \left( bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left( bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left( bb - aa + \frac{5}{3\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \left[ \frac{14bb(1-saa)}{3}, \frac{14bb(1-saa)}{3}, \frac{52^{\frac{3}{2}}bb(1-saa)}{3} \right]$$

In our case we get

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan hukum silang ini untuk mencari penyebarannya di A. Untuk melakukannya, kita membuat hukum silang untuk kuadran a, b, dan c, dan menyelesaikannya untuk penyebarannya sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukannya dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(% , x)
```

$$1024 = 1600(1-x)$$

$$\left[ x = \frac{9}{25} \right]$$

Kami sudah mengetahui hal ini. Pengertian penyebarannya merupakan kasus khusus dari hukum silang.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk persamaan umum a,b,c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung penyebarannya sudut suatu segitiga dengan mengetahui kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[ \left[ \frac{168bbx + 36b^2 + (-72aa - 84)b + 36aa^2 - 84aa + 49}{36}, \frac{168bx + 36b^2 + (-72aa - 84)b + 36aa^2 - 84aa + 49}{36}, \frac{152^{\frac{3}{2}}bx + 18b^2 + (-36aa - 152^{\frac{3}{2}})b + 18aa^2 - 152^{\frac{3}{2}}aa + 25}{18} \right] = 0 \right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometri.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi-sisinya

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

This is the angle in degrees.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

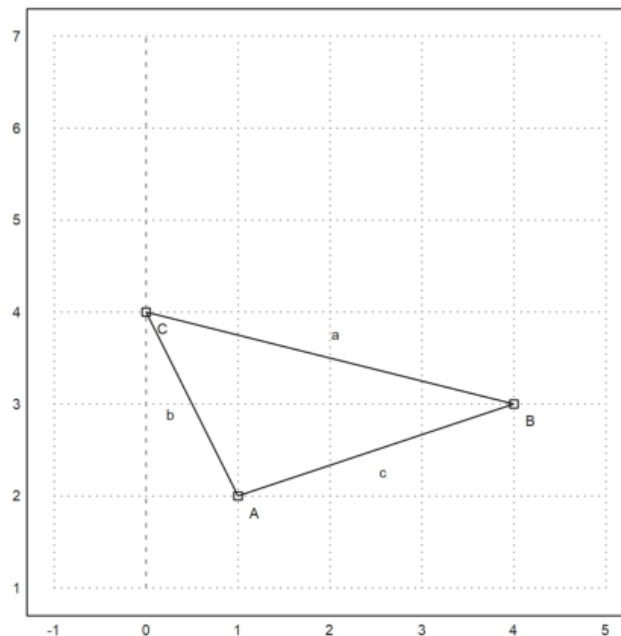
```
67°47'32.44''
```

## Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh lebih lanjut.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
setPlotRange(-1,5,1,7); ...
plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
insimg;
```



Dengan menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan fungsi jarak file Euler untuk geometri. Fungsi jarak menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memuat fungsi kuadrat antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena  $c+b$  bukan  $a$ , maka segitiga tersebut bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

10

5

17

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi `computeAngle` menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan floating point.

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{17}}\right)$$

32.4711922908

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadrat  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  ke dalam hukum silang dan selesaikan  $x$ .

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%x),
```

$$4 = 200(1 - x)$$

$$\left[ x = \frac{49}{50} \right]$$

Yaitu, fungsi penyebaran yang didefinisikan dalam "geometri.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Itu menyelesaikan suku  $\sin(\arccos(\dots))$  menjadi hasil pecahan. Kebanyakan siswa tidak dapat melakukan hal ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita mendapatkan sebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha pada sisi a. Ingat itu!

by definition.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan sebaran.

image: (20) Rational\_Geometry\_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga tersebut. Jangan lupa, bahwa kita sedang berhadapan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

The usual determinant formula yields the same result.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

---

## The Heron Formula

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung penyebaran di B untuk sebuah segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang benar, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4 - (-2b^2 - 2a^2)c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}{4a^2c^2}$$

$$\frac{(-c + b + a)(c - b + a)(c + b - a)(c + b + a)}{16}$$

---

## Aturan Penyebaran Tiga Kali Lipat

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut yang sama.

Namun, tiga spread segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc + sb + sa)^2 = 2(sc^2 + sb^2 + sa^2) + 4sa sb sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut mana pun yang besarnya  $180^\circ$ .

Sejak menyebarnya :

sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga benar, jika

Karena penyebaran sudut negatifnya sama, maka aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut  $60^\circ$ . Ini  $3/4$ . Namun persamaan tersebut memiliki solusi kedua, dimana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[ x = \frac{3}{4}, x = 0 \right]$$

Penyebaran  $90^\circ$  jelas sama dengan 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi  $90^\circ$ , penyebarannya menyelesaikan persamaan rangkap tiga dengan  $a, b, 1$ . Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan  $a+b=1$ .

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$(y + x + 1)^2 = 2(y^2 + x^2 + 1) + 4xy$$

$$[x = 1 - y]$$

Karena penyebaran  $180^\circ$ -t sama dengan penyebaran  $t$ , rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika salah satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.

Sehingga kita dapat mencari penyebaran sudut dua kali lipat tersebut. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami menjadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1])))
```

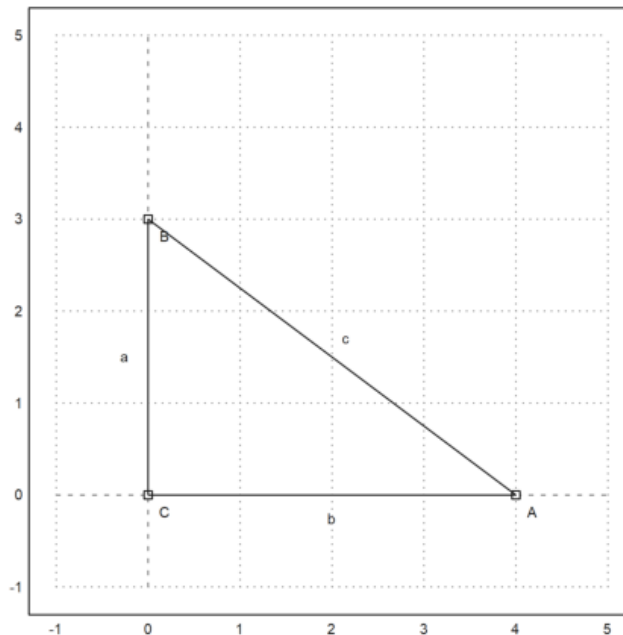
$$[x = 4a - 4a^2, x = 0]$$

$$- 4(a - 1)a$$

## Pembagi Sudut

Inilah situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Namun kita ingin menyelesaikannya secara umum  $a, b, c$ .

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga kali lipat.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut membagi dua  $180^\circ$ -wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left( 2x + \frac{a}{b+a} \right)^2 = 2 \left( 2x^2 + \frac{a^2}{(b+a)^2} \right) + \frac{4ax^2}{b+a}$$



$$\left[ x = \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}{2b+2a}, x = \frac{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}{2b+2a} \right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}{2b+2a}$$

Let us check for the Egyptian rectangle.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kita dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebarannya ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

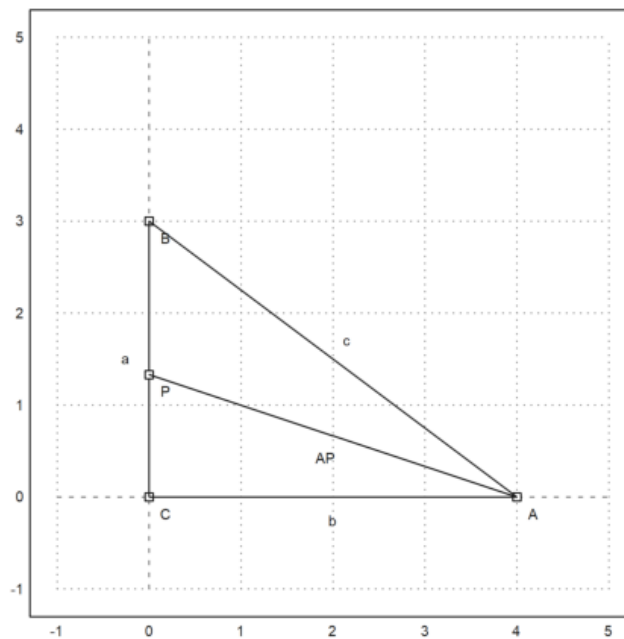
```
18°26'5.82''
```

Titik P merupakan perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0, 1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Let us check the angles in our specific example.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang garis bagi AP.

Kita menggunakan teorema sinus pada segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

berlaku di segitiga mana pun. Jika digabungkan, maka hal ini akan diterjemahkan ke dalam apa yang disebut dengan "hukum penyebaran"

dimana a,b,c menunjukkan qudrance.

Karena spread CPA adalah  $1-sa^2$ , kita memperolehnya bisa  $1=b/(1-sa^2)$  dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2b(b+a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Let us check this formula for our Egyptian values.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])"), distance(A,P))
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

We can also compute P using the spread formula.

```
>py:=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b(\sqrt{b}\sqrt{b+a}-b-a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita peroleh dengan rumus trigonometri.

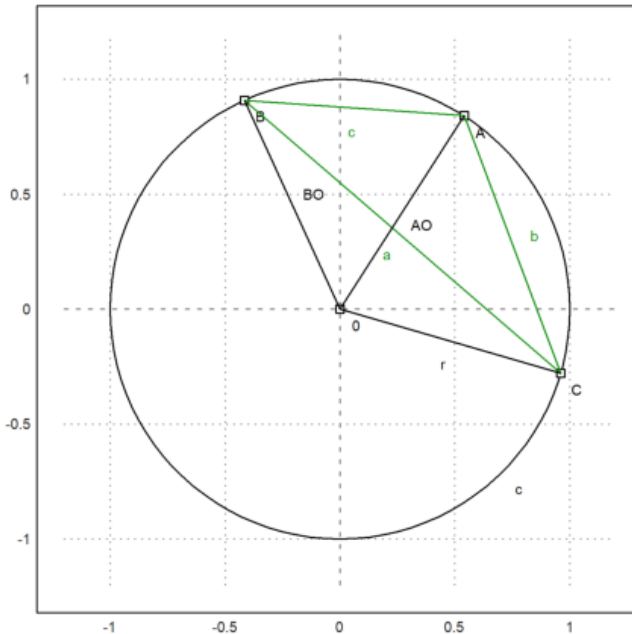
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

### Sudut Akord

Lihatlah situasi berikut :

```
>setPlotRange(1.2); ...
color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...
plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus jari-jari kuadrat dari perilingkaran dalam kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc := rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{abc}{c^2 - 2bc + a(-2c - 2b) + b^2 + a^2}$$

Kita dapat menjadikannya fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Let us check the result for our points A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

The radius is indeed 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

1

Faktanya, penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut tali busur.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Faktanya, penyebarannya adalah  $b/(4r)$ , dan kita melihat bahwa sudut tali busur b adalah setengah sudut pusatnya.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

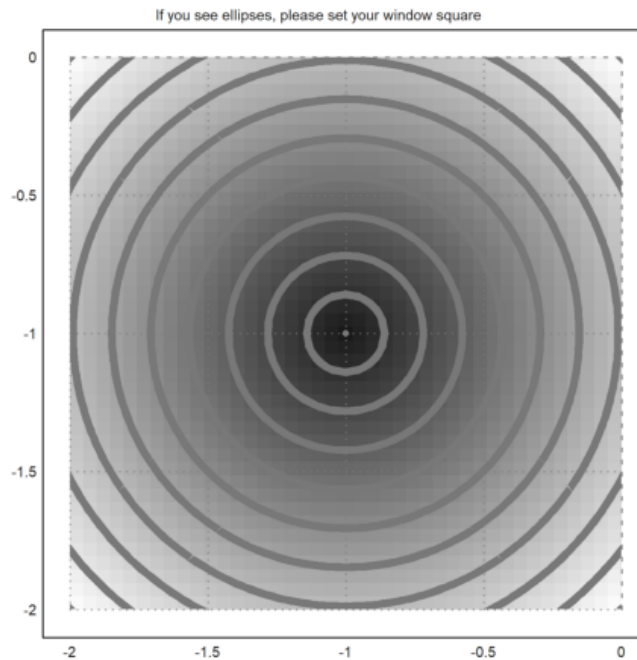
0

## Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

### Catatan awal

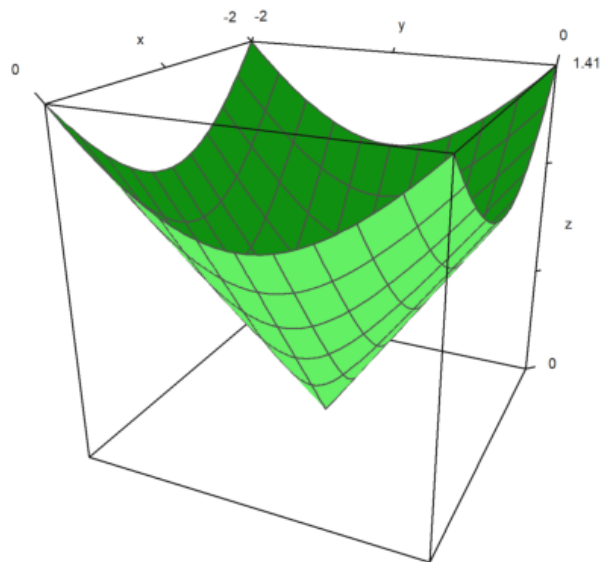
Fungsi yang, ke titik M pada bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, mempunyai garis datar yang cukup sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function dl(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("dl",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1,...
  title="If you see ellipses, please set your window square");
```



dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("dl",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

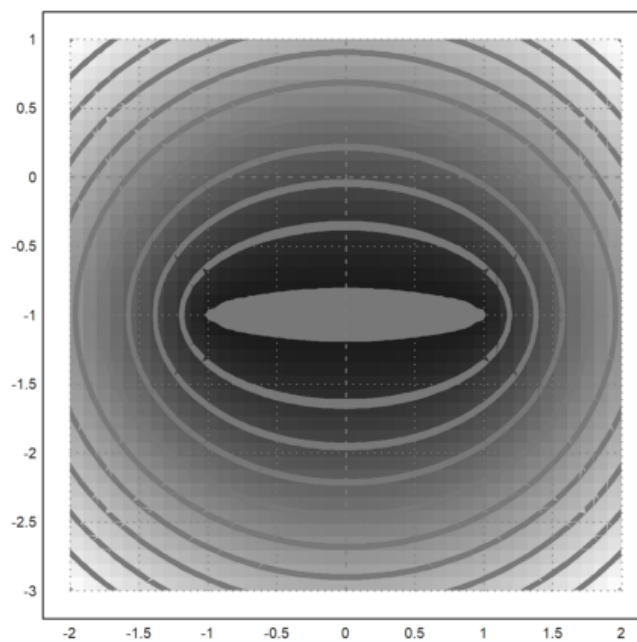


Tentu saja minimum 0 dicapai di A.

### Dua poin

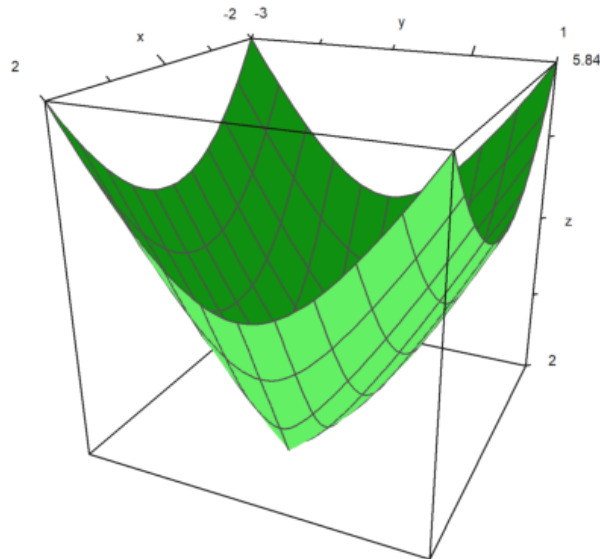
Sekarang kita lihat fungsi  $MA+MB$  dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Merupakan "fakta yang diketahui" bahwa kurva tingkat berbentuk elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali AB minimum yang konstan pada ruas  $[AB]$ :

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



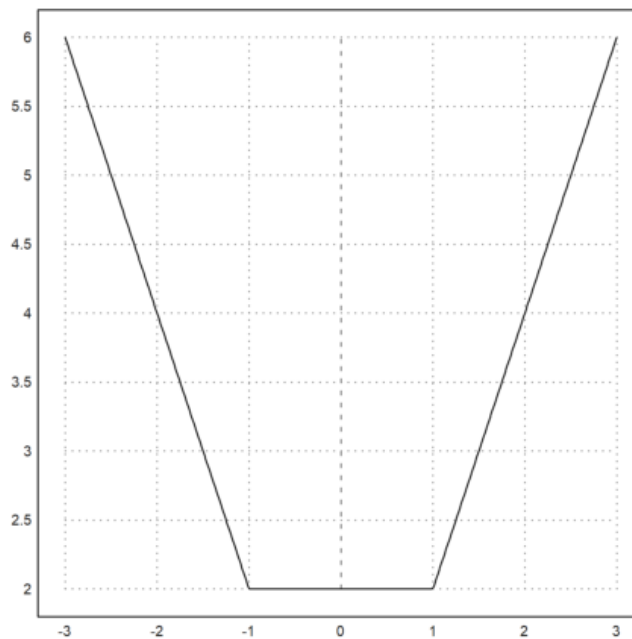
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



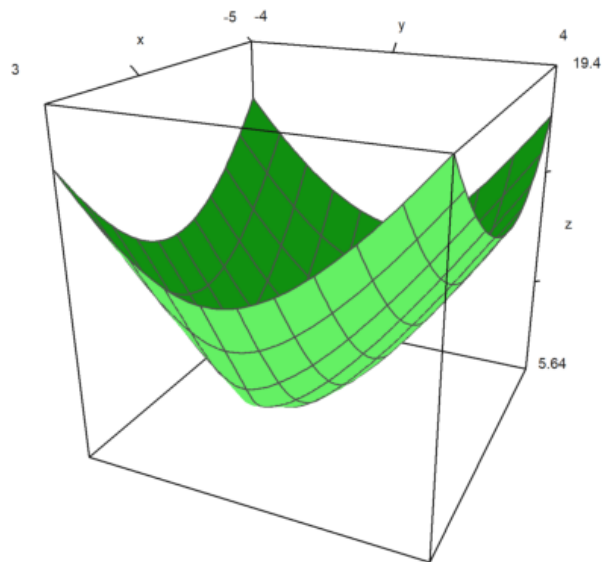
### Tiga poin

Kini segalanya menjadi lebih sederhana: Tidak diketahui secara luas bahwa  $MA+MB+MC$  mencapai nilai minimumnya pada satu titik pada bidang tersebut, namun untuk menentukannya tidaklah mudah:

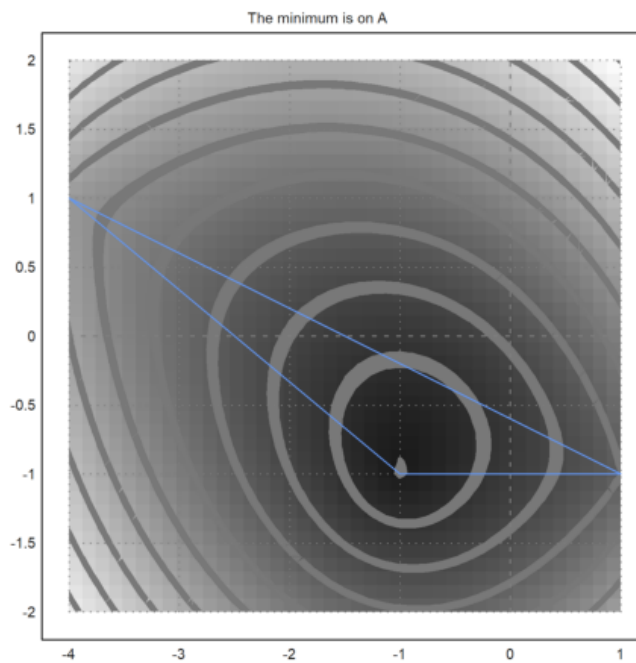
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari  $120^\circ$  (katakanlah di A), maka sudut minimum dicapai pada titik tersebut (katakanlah AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

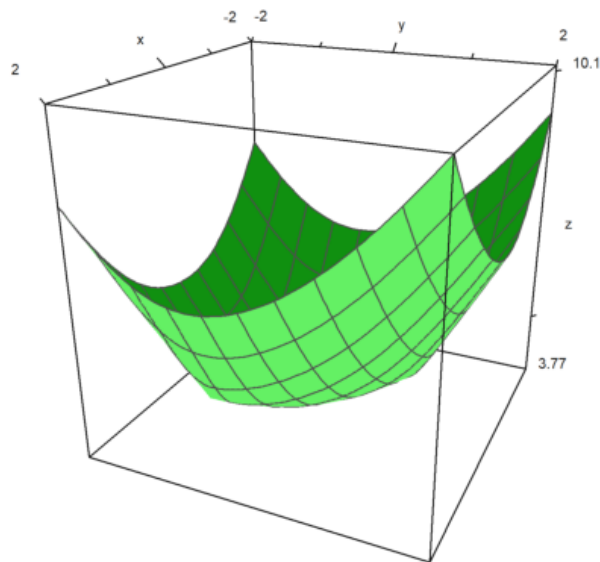


```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

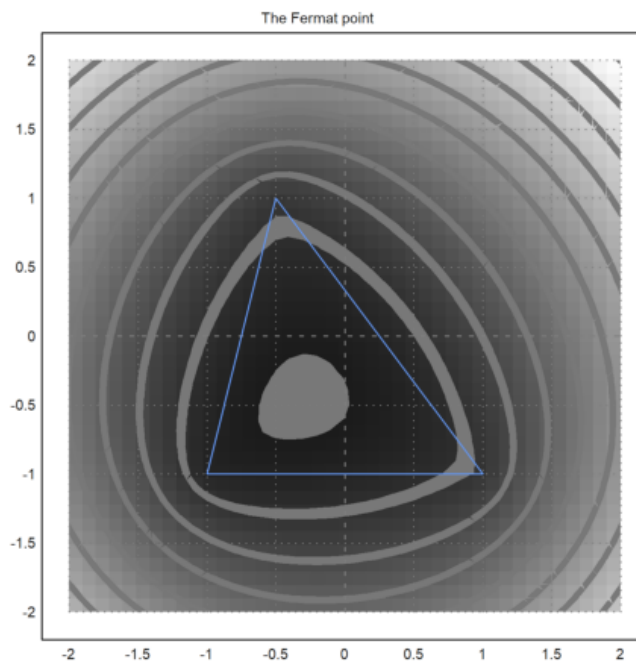


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari  $120^\circ$ , maka titik minimum ada di titik F di bagian dalam segitiga, yaitu satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing sudutnya  $120^\circ$ ):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```



```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



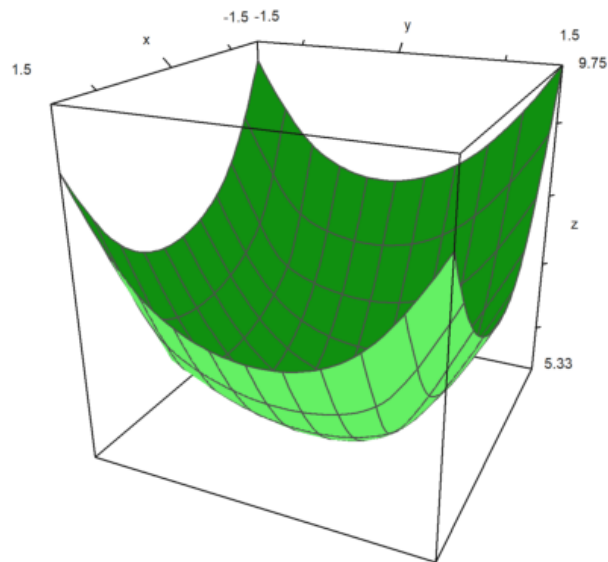
Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft tertulis di Java yang memiliki instruksi "garis kontur"...

Semua hal di atas ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para penggila lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga  $FA+FB+FC$  minimal disebut titik Fermat segitiga. Namun nampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torricelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Pokoknya tradisinya adalah memperhatikan hal ini F...

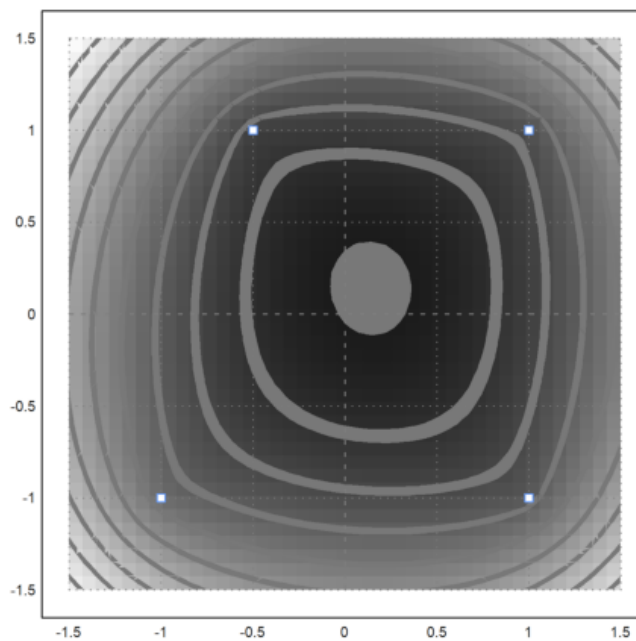
### Empat poin

Langkah selanjutnya adalah menambahkan poin ke-4 D dan mencoba meminimalkan  $MA+MB+MC+MD$ ; katakanlah Anda seorang operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus memasang antenna sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



Masih ada nilai minimum dan tidak tercapai di simpul A, B, C, atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

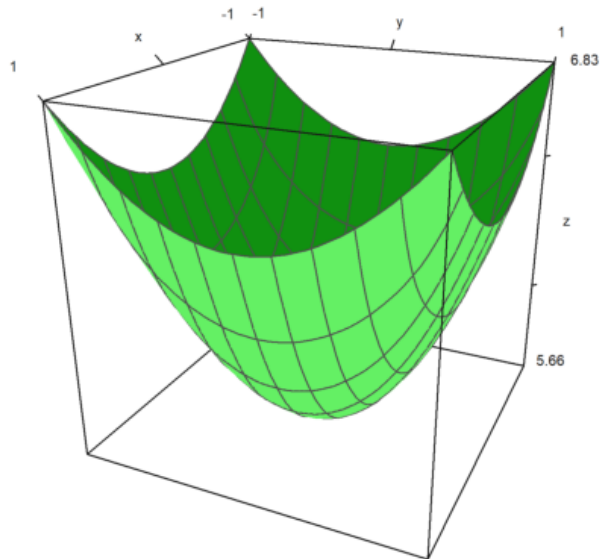
```
[0.142858, 0.142857]
```

Nampaknya dalam hal ini koordinat titik optimal bersifat rasional atau mendekati rasional...

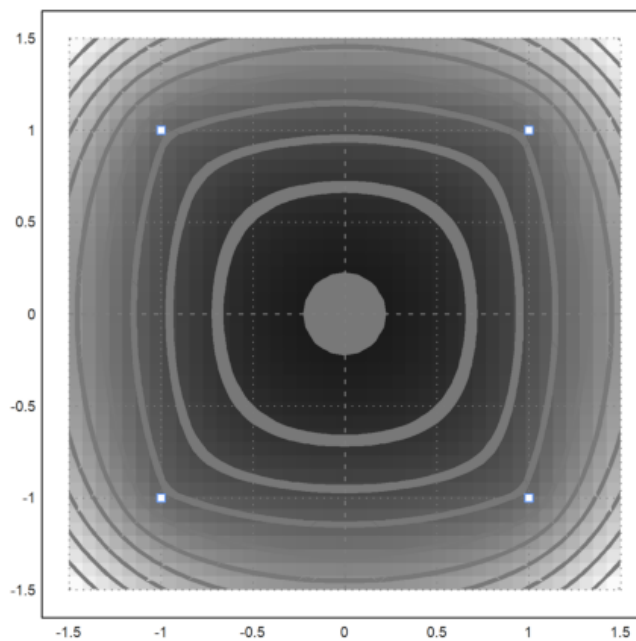
Sekarang ABCD adalah persegi, kita berharap titik optimalnya adalah pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```





```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



\*Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kita hitung jari-jari bola.

Jika diperhatikan gambar di bawah, terlihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

First the two lines forming the cone.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[ -1,a])
```

```
[ - a, - 1, 0]
```

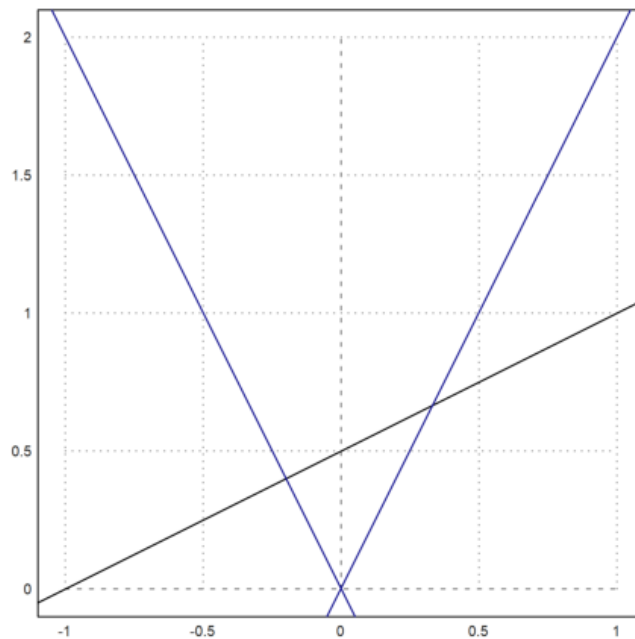
Thenm a third line.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[ - 1, 2, 1]
```

We plot everything so far.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Now we take a general point on the y-axis.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Compute the distance to g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$

Compute the distance to g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5} - u\right)^2 + \frac{(2u-1)^2}{25}}$$

Dan tentukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[ u = \frac{-\sqrt{5}\sqrt{a^2+1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1}, u = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2+1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1} \right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

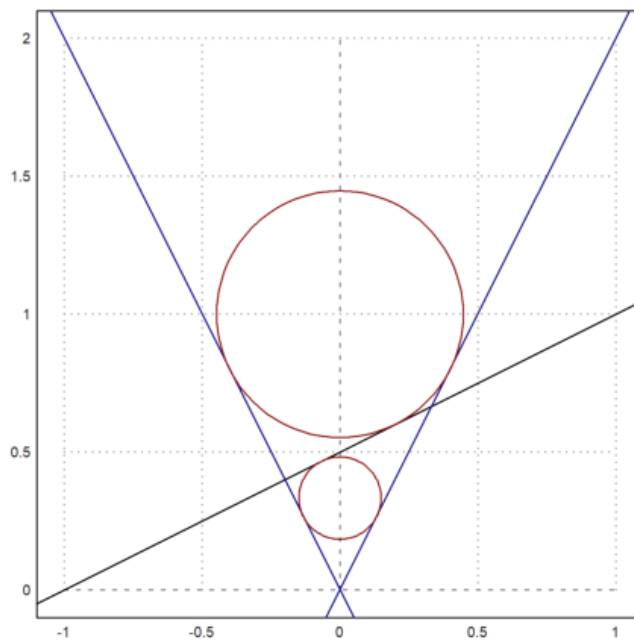
```
[0.333333, 1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071, 0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



### Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart (zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis kedua bola tersebut ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

We generate a plane restricted to the cone.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
```

```
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita buat dua titik pada lingkaran, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Lalu kita buat dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

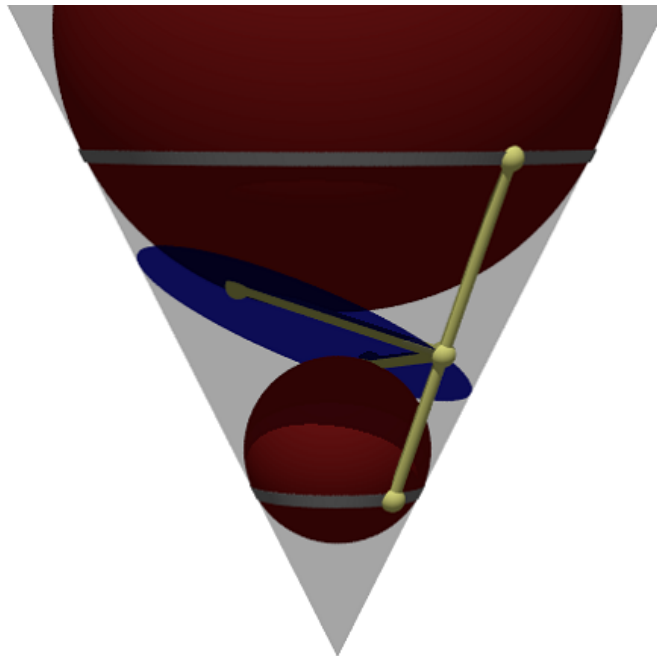
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, dimana bola menyentuh kerucut.

```
>povend();
```



Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

```
>function scene () ...
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

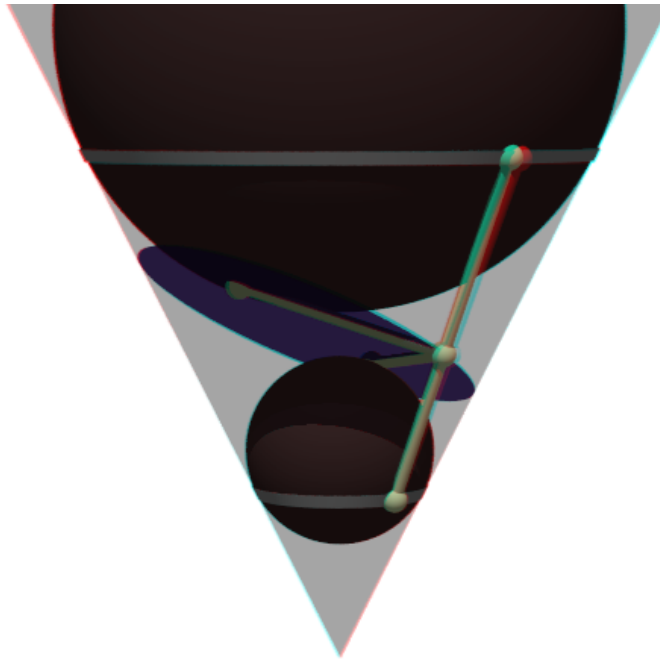
```

P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction

```

Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk melihat efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



## Contoh 8: Geometri Bumi

Di buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569, 1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bulat).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

S 6°59.050' E 110°24.533'

Pertama kita menghitung vektor dari satu bola ke bola ideal lainnya. Vektor ini adalah [pos, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1], br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak sedekat itu, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found: // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...
^
```

Judulnya ada fungsinya, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
65.34°
```

Sudut suatu segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(asum)
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan pada asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found: // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...
^
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata dari segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke suatu posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola ideal. Hal yang sama terjadi di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita lihat contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found: // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...
^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun kita tidak lagi mendapatkan posisi sasaran yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, namun melakukan perkiraan jari-jari bumi di sepanjang lintasan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

The error is not large, however.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana saja di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kita jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan tujuan yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambah 10 kali sepersepuluh jarak, pakai jurusan Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

The result is far off.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'
1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi yang mempunyai garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran dengan garis lintang 30°, melainkan jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah perjalanan kita. Untuk tujuan kasarnya, kita sesuaikan pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...
  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kita mendapatkan perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

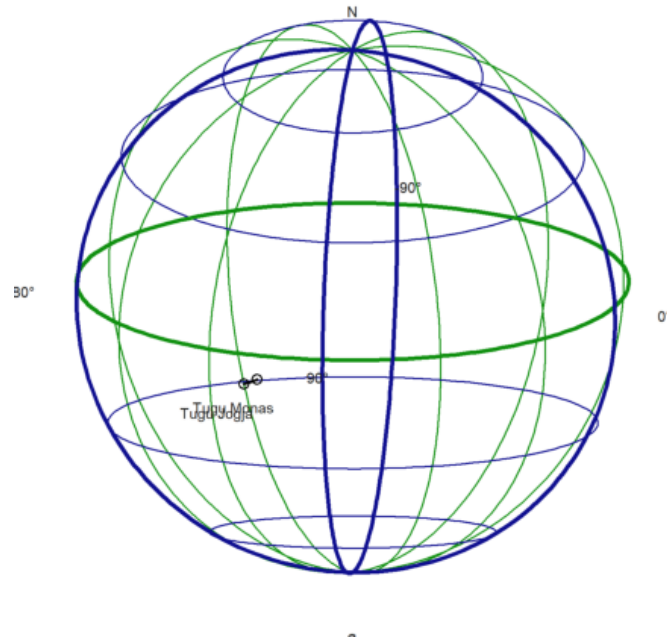
Kita menulis sebuah fungsi yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
  useglobal;
  plotearth;
  plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
  plotposline(v);
endfunction
```

Now plot everything.

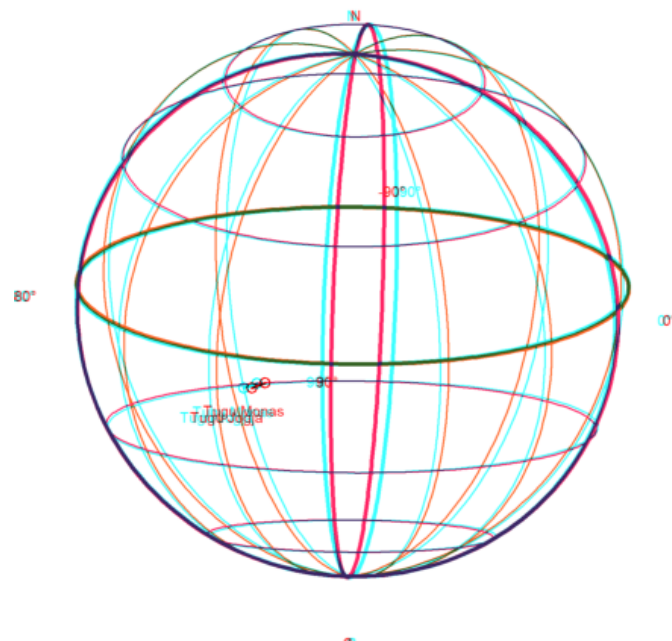
```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user, zoom=4):
```





Atau gunakan `plot3d` untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot", angle=25, height=6, distance=5, own=1, anaglyph=1, zoom=4) :
```



## Latihan

1. Gambarkan segi- $n$  beraturan jika diketahui titik pusat  $O$ ,  $n$ , dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi- $n$  tersebut (jari-jari lingkaran luar segi- $n$ ),  $r$ .

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi- $n$  adalah  $(360/n)$ .
- Titik-titik sudut segi- $n$  merupakan perpotongan lingkaran luar segi- $n$  dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan  $(360/n)$ .
- Untuk  $n$  ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk  $n$  genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

```
>load geometry
```

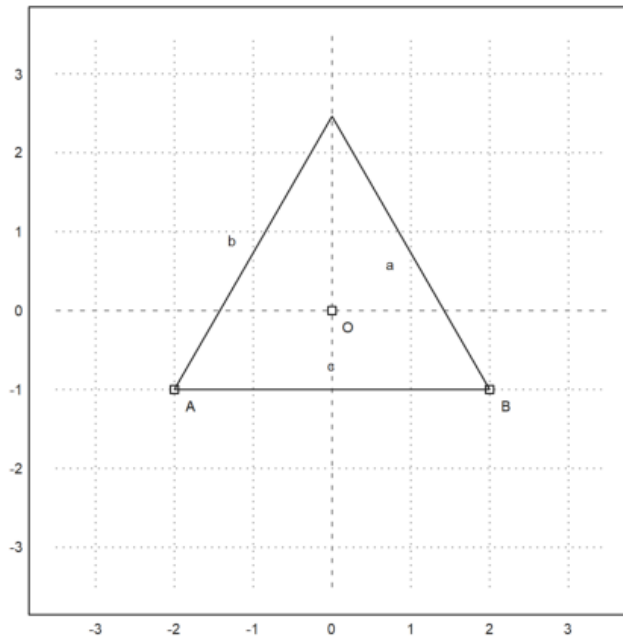
```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-3.5, 3.5, -3.5, 3.5);
>O=[0,0]; plotPoint(O,"O");
```

```

>A=[-2,-1]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,-1]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,2*3^0.5-1]; plotPoint(A,"A");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>aspect(1):

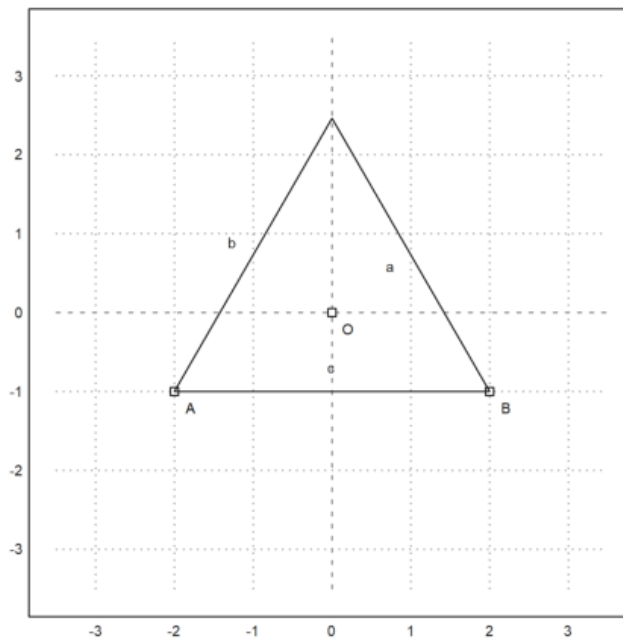
```



```

>c=circleThrough(A,B,C):

```



```

>R=getCircleRadius(c);
>O=getCircleCenter(c)

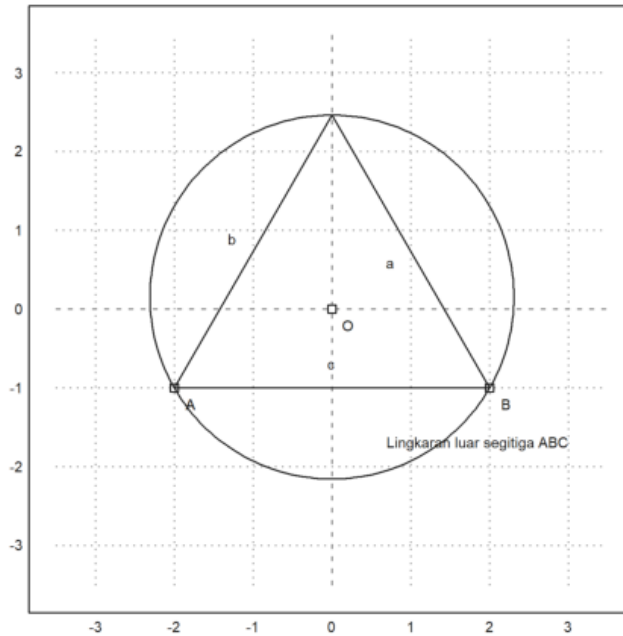
```

```
[0, 0.154701]
```

```

>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):

```

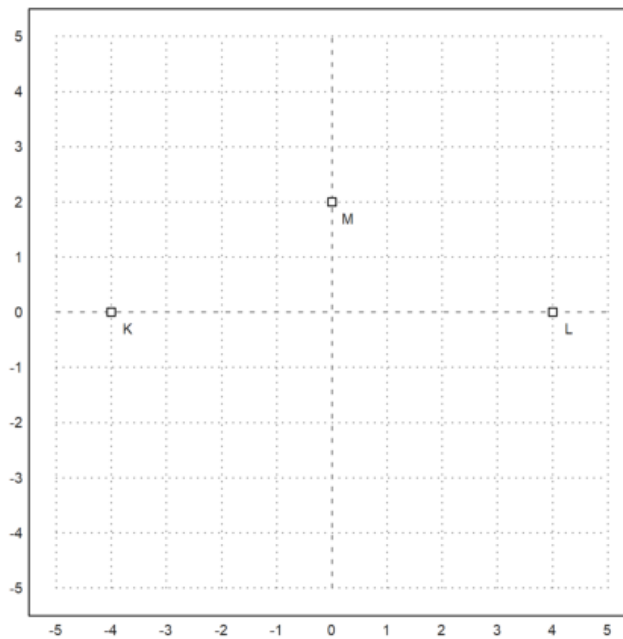


2. Gambarkan suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya  $y = ax^2 + bx + c$ .
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai  $a, b, c$ .

```
>setPlotRange(5);
>K=[-4,0]; L=[4,0]; M=[0,2];
>plotPoint(K,"K"); plotPoint(L,"L"); plotPoint(M,"M"):
```



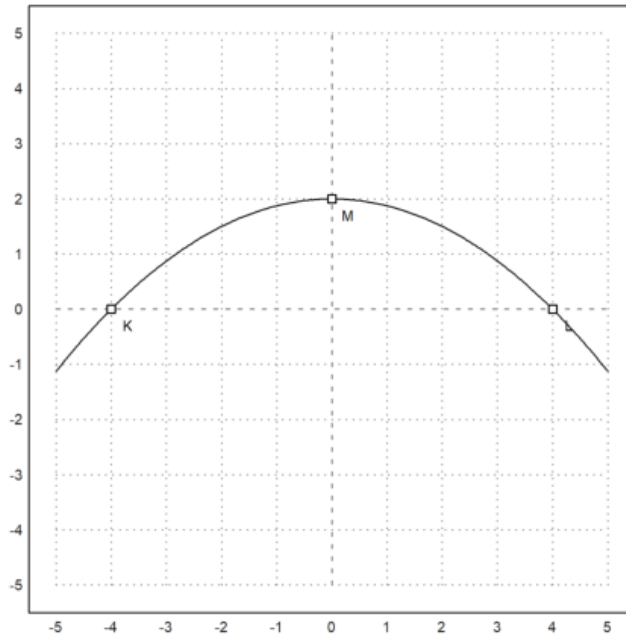
```
>sol &= solve([16*a+8*b=-c, 16*a-8*b=-c, c=2], [a, b, c])
```

```
[[a = -1/8, b = 0, c = 2]]
```

```
>function y&=-1/8*(x^2)-0*x+2
```

```
2
 x
2 - --
```

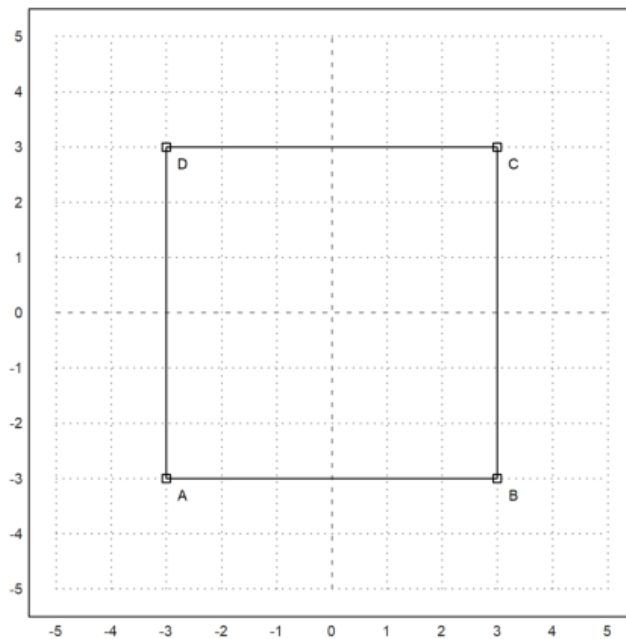
```
>plot2d("-1/8*(x^2)-0*x+2",-5,5,-5,5); ...
plotPoint(K,"K"); plotPoint(L,"L"); plotPoint(M,"M");
```



3. Gambarkan suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

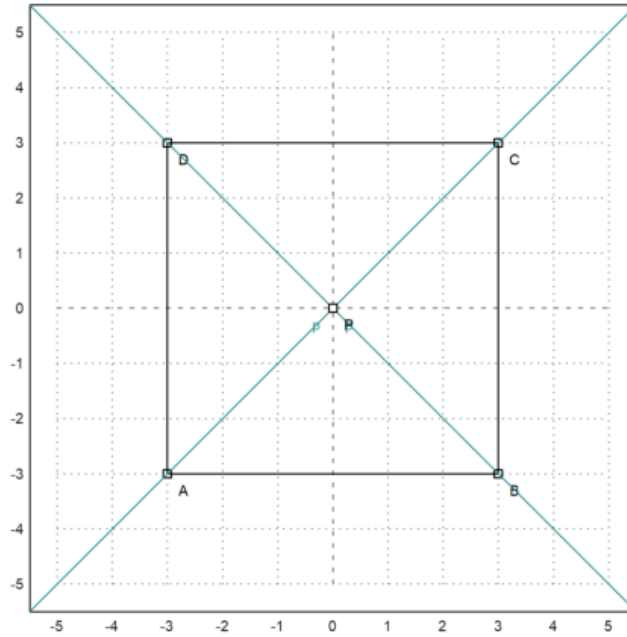
```
>setPlotRange(5);
>A=[-3,-3]; B=[3,-3]; C=[3,3]; D=[-3,3];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,D,""); plotSegment(D,A,"");
```



```
>l=angleBisector(A,B,C);
>g=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,g)
```

[0, 0]

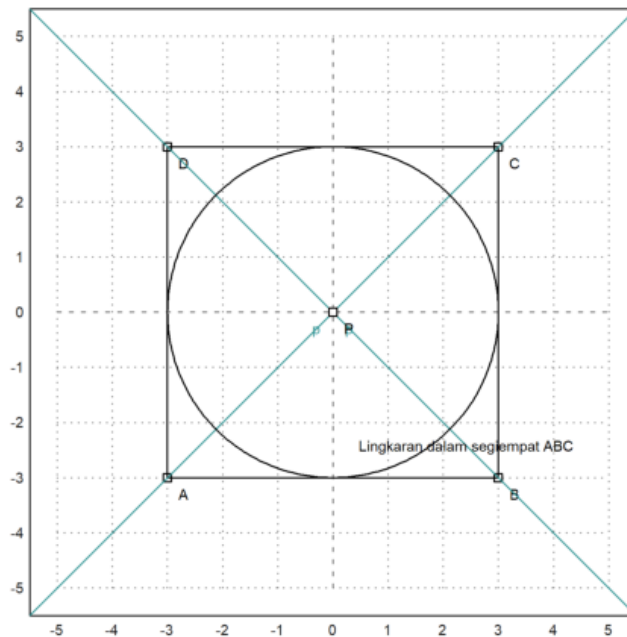
```
>color(5); plotLine(1); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P"):
```



```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

3

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABC"):
```



Dari gambar di atas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) // panjang sisi AB
```

6

```
>BC=norm(B-C) // panjang sisi ABC
```

6

```
>CD=norm(C-D) // panjang sisi CD
```

6

```
>DA=norm(D-A) // panjang sisi DA
```

6

```
>AB.CD
```

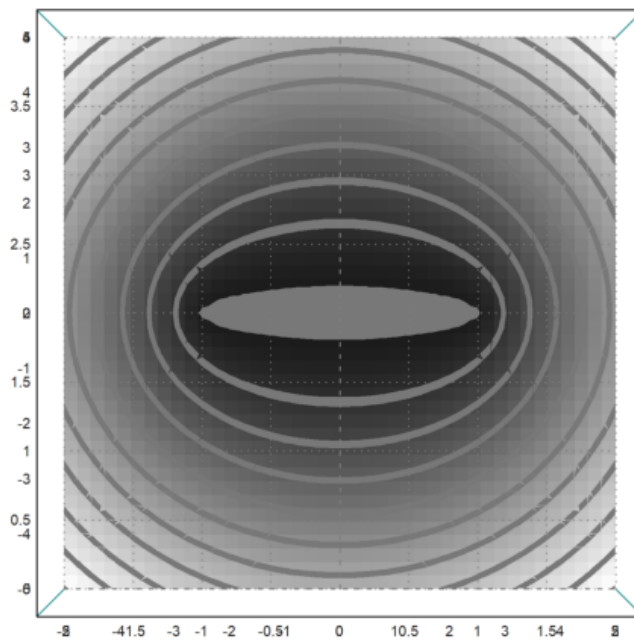
36

```
>DA.BC
```

36

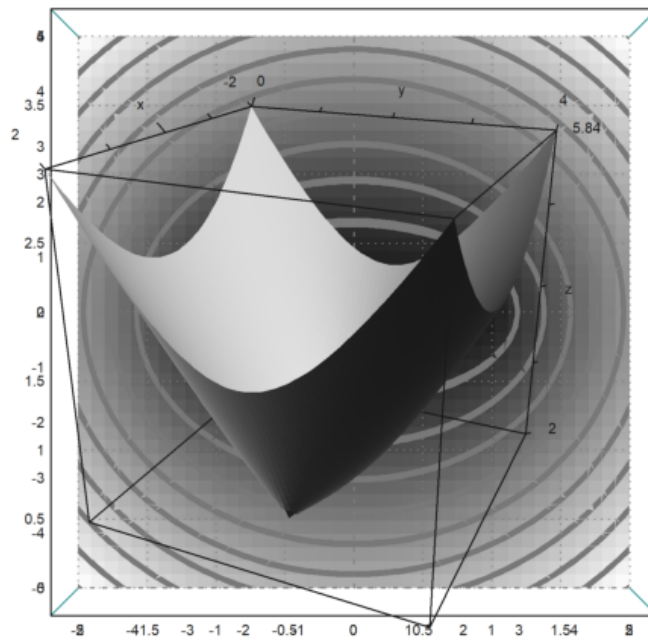
5. Gambarkan suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>P=[-1,2]; Q=[1,2];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```



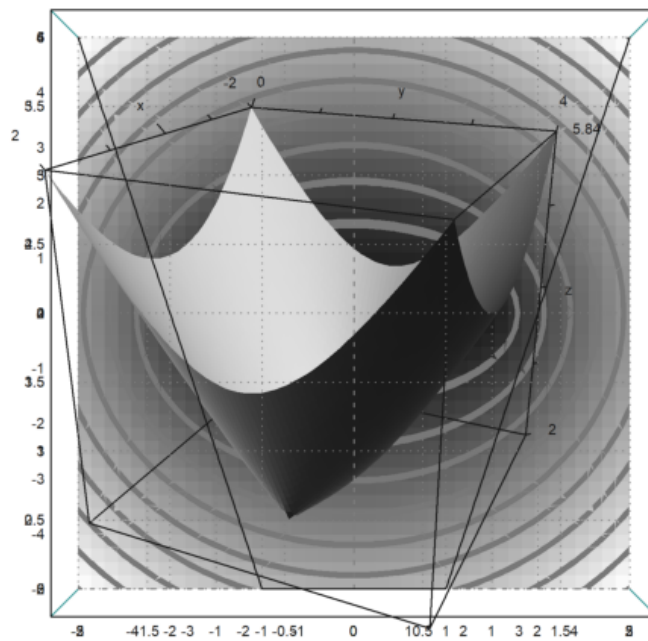
Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```



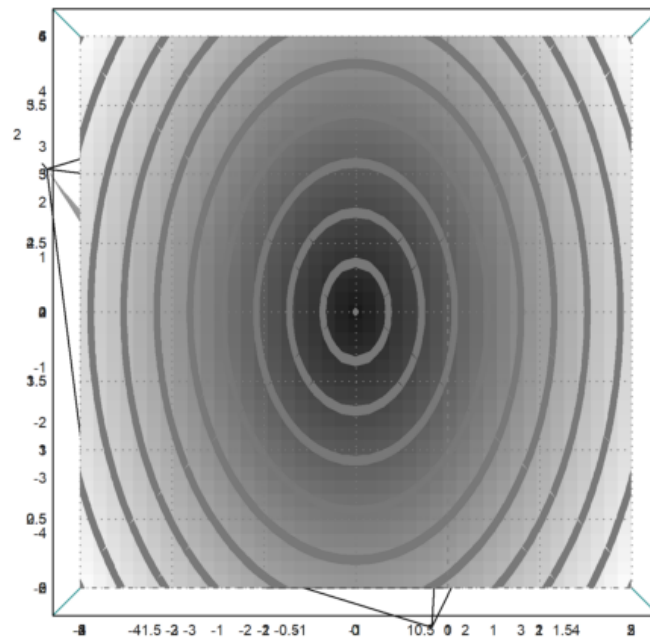
Batasan garis PQ

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



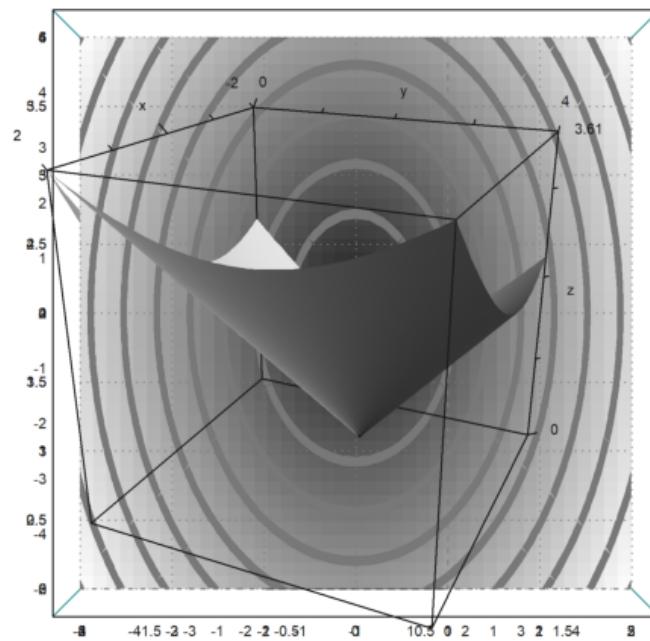
5. Gambarkan suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>P=[-1,2]; Q=[1,2];
>function d3(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```



Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d3", xmin=-2, xmax=2, ymin=0, ymax=4, hue=1) :
```



```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)", xmin=-3, xmax=3) :
```



