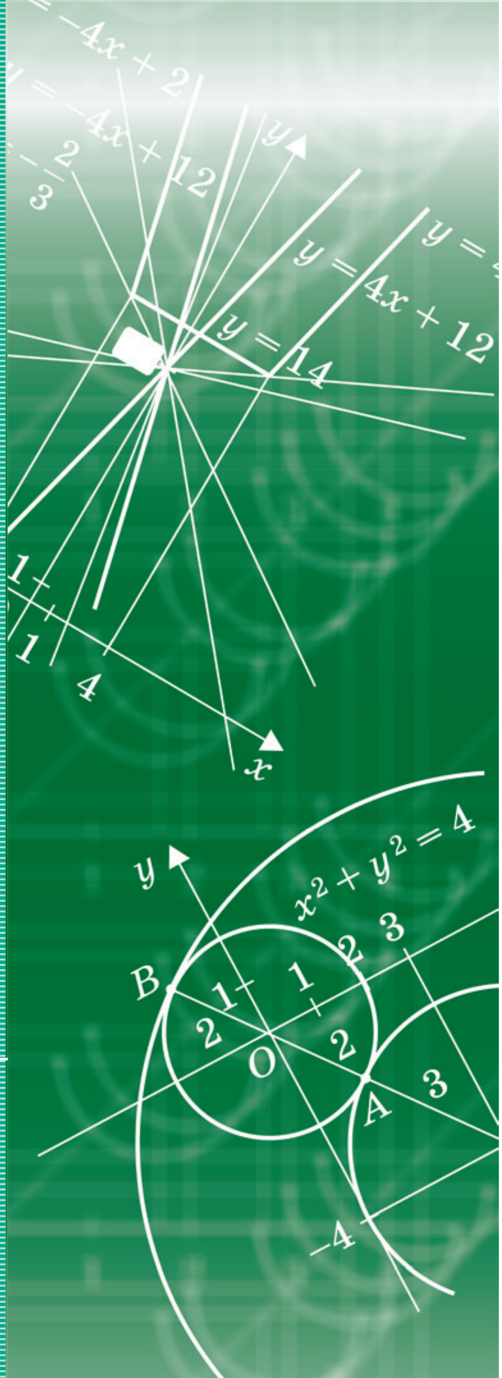
Ю. САДОВНИЧИЙ,
г. Москва

ЗАДАЧА С5:
ПОМОГАЕТ ГРАФИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ



Задача С5 Единого государственного экзамена по математике — это логическая задача, содержащая параметр. Часто бывает, что такую задачу проще решать с применением графической иллюстрации. В настоящей статье продемонстрированы некоторые способы применения таких иллюстраций. На примере конкурсных задач, а также задач, аналогичных заданиям ЕГЭ-2010 и ЕГЭ-2011, автор обобщил различные методы решения подобных задач.

В конце статьи приводятся задания для самостоятельного решения, аналогичные разобранным. Рекомендуется поступающим в вузы, учащимся старших классов и преподавателям математики.

Задача 1. При каких значениях c уравнение $\sqrt{16-x^2}=-c-x$ имеет единственное решение?

Решение. Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y=\sqrt{16-x^2}$ и $y=-c-x$. Так как

$$y=\sqrt{16-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0,\\ x^2+y^2=16,\end{cases}$$

то первый график представляет собой верхнюю полуокружность с центром в точке $(0;\,0)$ и радиусом 4. Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом -1, пересекающую ось Ox в точке $(-c;\,0)$ (рис. 1).

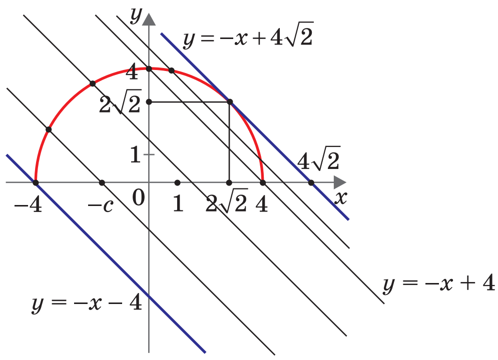


Рис. 1

Исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эти два графика пересекаются ровно в одной точке. Как видно из рисунка, это происходит в одном из следующих двух случаев:

1. Прямая $y=-c-x$ касается полуокружности в точке $\left(2\sqrt{2};\,2\sqrt{2}\right)$, что соответствует значению параметра $c=-4\sqrt{2}$.

2. Прямая $y=-c-x$ лежит в полосе, ограниченной прямыми $y=-x-4$ и $y=-x+4$ (включая первую и исключая последнюю), что соответствует $c\in(-4;\,4]$.

Во всех остальных случаях прямая $y=-c-x$ либо пересекает полуокружность $y=\sqrt{16-x^2}$ ровно в двух точках, либо не имеет с ней общих точек.

К материалу есть приложение на CD-диске.

Объединяя все полученные значения, находим ответ: $c \in \{-4\sqrt{2}\} \cup (-4;\ 4]$.

Ответ: $c \in \{-4\sqrt{2}\} \cup (-4;\ 4]$.

Задача 2. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружности, задаваемые на координатной плоскости Oxy уравнениями системы, касаются внешним или внутренним образом (рис. 2).

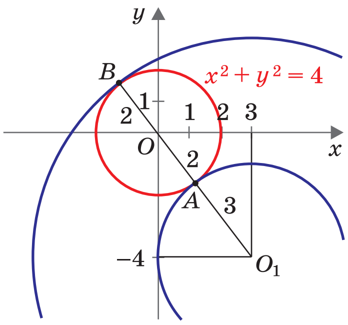


Рис. 2

Первая окружность имеет центр в точке (0; 0) и радиус 2, вторая — центр в точке (3; –4) и радиус $\sqrt{a}$. Расстояние между центрами окружностей равно 5, следовательно, в первом случае радиус второй окружности должен быть равен 3, а во втором — равен 7. Поэтому либо $a = 9$, либо $a = 49$.

Ответ: $a = 9$, $a = 49$.

Задача 3. Найти все значения a, при которых уравнение $|2x + 6| + |2x - 8| = ax + 12$ имеет единственное решение.

Решение. Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y = |2x + 6| + |2x - 8|$ и $y = ax + 12$. Первый график разбивается на три участка следующим образом?

$y = -2x - 6 - 2x + 8 = -4x + 2$, если $x \le -3$;

$y = 2x + 6 - 2x + 8 = 14$, если $-3 \le x \le 4$;

$y = 2x + 6 + 2x - 8 = 4x - 2$, если $x \ge 4$.

Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (0; 12) (рис. 3).

Исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда эти два графика пересекаются ровно в одной точке. Из рисунка видно, что это происходит в одном из следующих трех случаев:

1. Прямая $y = ax + 12$ лежит в остром угле, образованном прямыми $y = -4x + 12$ и $y = 4x + 12$, что соответствует значениям $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

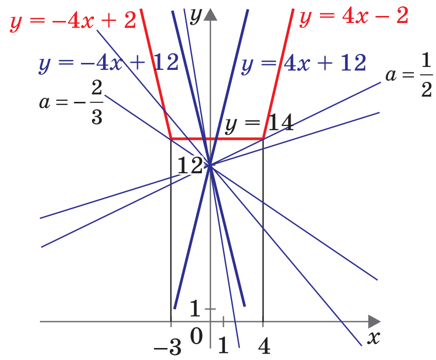


Рис. 3

2. Прямая $y = ax + 12$ проходит через точку (–3; 14), что соответствует $a = -\frac{2}{3}$.

3. Прямая $y = ax + 12$ проходит через точку (4; 14), что соответствует $a = \frac{1}{2}$.

Из рисунка также видно, что любая другая прямая, проходящая через точку (0; 12), либо пересекает график функции $y = |2x + 6| + |2x - 8|$ ровно в двух точках, либо не имеет с этим графиком общих точек.

Объединяя все полученные значения a, находим ответ: $a \in (-\infty; -4] \cup \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [4; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -4] \cup \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [4; +\infty)$.

Задача 4. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$ имеет ровно три различных корня?

Решение. Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y = |x^2 - 5|x||$ и $y = a(x + 4)$. Первый график разбивается на четыре участка следующим образом:

$y = x^2 + 5x$, если $x \le -5$;

$y = -x^2 - 5x$, если $-5 \le x \le 0$;

$y = -x^2 + 5x$, если $0 \le x \le 5$;

$y = x^2 - 5x$, если $x \ge 5$.

Второй график представляет собой прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (–4; 0) (рис. 4).

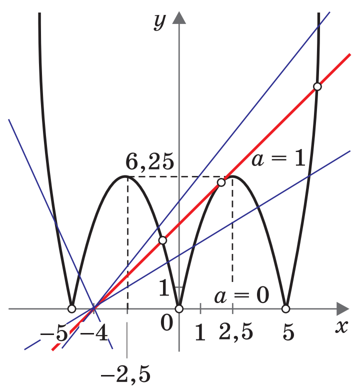


Рис. 4

Исходное уравнение имеет ровно три различных решения тогда и только тогда, когда эти два графика имеют ровно три общие точки. Как видно из рисунка, существуют две прямые, проходящие через точку $(-4; 0)$ и пересекающие график функции $y = |x^2 - 5|x||$ ровно в трех точках. Одна из этих прямых есть ось Ox и соответствует значению $a = 0$. Другая прямая является касательной к графику функции $y = -x^2 + 5x$ в точке, принадлежащей интервалу $x \in (0; 5)$. Найдем значение a, соответствующее этой прямой. При таком a уравнение

$$-x^2 + 5x = a(x + 4) \Leftrightarrow x^2 + (a - 5)x + 4a = 0$$

должно иметь одно решение на интервале $x \in (0; 5)$. Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (a - 5)^2 - 16a = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 26a + 25 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ или } a = 25.$$

Касательной, изображенной на рисунке, соответствует значение $a = 1$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ: $a = 0$, $a = 1$.

Задача 5. Для каждого значения $a > 0$ найти уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих ровно две общие точки с графиком функции $f(x) = x|x + 2a| + a^2$.

Решение. Если $x \geq -2a$, то $f(x) = x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$, поэтому ее график есть часть параболы, касающейся оси абсцисс в точке $x = -a$ с ветвями, направленными вверх. Если же $x \leq -2a$, то $f(x) = -x^2 - 2ax + a^2 = -(x + a)^2 + 2a^2$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -a$, ветви которой направлены вниз. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(-2a; a^2)$ (рис. 5).

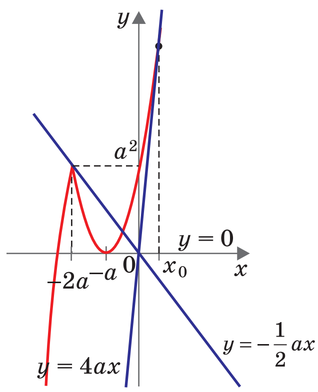


Рис. 5

Прямая $x = 0$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ только одну общую точку. Из рисунка видно, что прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с графиком этой функции в одном из следующих трех случаев:

1. Прямая проходит через точку $(-2a; a^2)$. Она имеет уравнение $y = -\frac{1}{2}ax$.

2. Прямая совпадает с осью абсцисс и имеет уравнение $y = 0$.

3. Прямая касается ветви графика в точке с абсциссой $x_0 > 0$ и пересекает вторую часть графика. Найдем значение k, соответствующее этой прямой. При таком k уравнение

$$kx = (x + a)^2 \Leftrightarrow x^2 + (2a - k)x + a^2 = 0$$

должно иметь ровно одно решение. Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (2a - k)^2 - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow -4ak + k^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = 0 \text{ или } k = 4a.$$

Касательной, изображенной на рисунке, соответствует значение $k = 4a$.

Объединяя все рассмотренные случаи, находим ответ: $y = 0$, $y = -\frac{1}{2}ax$, $y = 4ax$.

Ответ: $y = 0$, $y = -\frac{1}{2}ax$, $y = 4ax$.

Задача 6. Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$ имеет ровно одно решение.

Решение. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2} = a - \sqrt{1 - (x - a)^2}.$$

Построим на координатной плоскости Oxy графики функций $y = 3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2}$ и $y = a - \sqrt{1 - (x - a)^2}$. Так как

$$y = 3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - (x - 3)^2} = 3 - y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3, \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1, \end{cases}$$

то первый график представляет собой нижнюю полуокружность с центром в точке $(3; 3)$ и радиусом 1. Аналогично,

$$y = a - \sqrt{1 - (x - a)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq a, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 1, \end{cases}$$

поэтому второй график представляет собой нижнюю полуокружность с центром в точке $(a; a)$ и радиусом 1 (рис. 6).

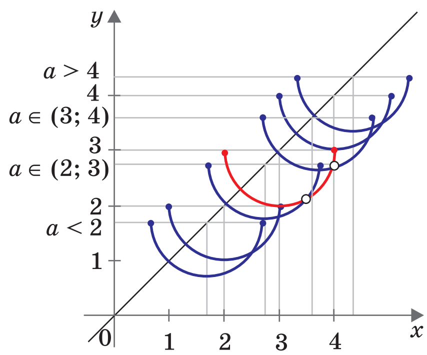


Рис. 6

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда полуокружности, указанные в пунктах 1 и 2, пересекаются ровно в одной точке. Как видно из рисунка, если $a < 2$ или $a > 4$, эти полуокружности не пересекаются; если $2 \le a \le 4$, $a \ne 3$, то они пересекаются в одной точке; если $a = 3$ — совпадают. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение при $a \in [2; 3) \cup (3; 4]$.

Ответ: $a \in [2; 3) \cup (3; 4]$.

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2} = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Решим первое уравнение системы как квадратное относительно y. Дискриминант этого уравнения $D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + a - 2) = 9$, поэтому корни уравнения равны

$$y = \frac{2a+1+3}{2} = a+2 \text{ и } y = \frac{2a+1-3}{2} = a-1.$$

Таким образом, на координатной плоскости Oxy множество решений этого уравнения представляет собой две прямые, параллельные оси Ox и отстоящие друг от друга на расстояние 3.

Определим геометрический смысл второго уравнения. Для этого заметим, что число $\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ есть расстояние на координатной плоскости между точками с координатами $(x; y)$ и $(a; 0)$, а число $\sqrt{(x-a)^2 + (y-3)^2}$ — расстояние между точками с координатами $(x; y)$ и $(a; 3)$. Так как точки $(a; 0)$ и $(a; 3)$ находятся друг от друга на расстоянии 3, то второе равенство системы верно тогда и только тогда, когда точка $(x; y)$ принадлежит отрезку, соединяющему эти две точки. Следовательно, множество решений этого уравнения на координатной плоскости представляет собой отрезок, соединяющий точки с координатами $(a; 0)$ и $(a; 3)$ (рис. 7).

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда пара прямых, рассмотренных в пункте 1, имеет с отрезком, рассмотренным в пункте 2, ровно одну общую точку. Из рисунка видно, что это происходит в одном из следующих двух случаев:

1. Верхний конец отрезка лежит на прямой $y = a - 1$ или выше ее, при этом нижний конец отрезка лежит ниже этой прямой. Такая конфигурация соответствует значениям $a \in (1; 4]$ (рис. 7, *а* и *б*).

2. Нижний конец отрезка лежит на прямой $y = a + 2$ или ниже ее, при этом верхний конец отрезка лежит выше этой прямой. Эта конфигурация соответствует значениям $a \in [-2; 1)$ (рис. 7, *г* и *д*).

Во всех остальных случаях отрезок и пара прямых либо не пересекаются, либо имеют ровно две общие точки (рис. 7, *в* и *е*). Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$.

Ответ: $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$.

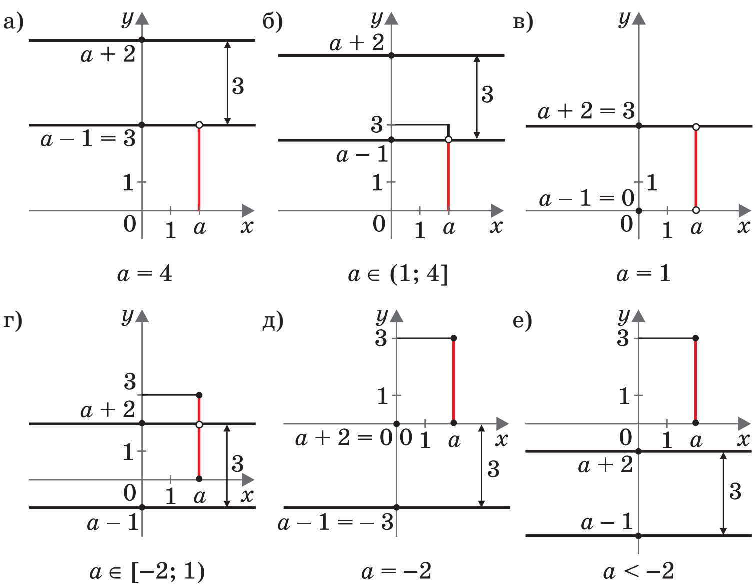


Рис. 7

Задача 8. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) \le 0$ не содержит ни одной точки из отрезка $x \in [-1; 1]$.

Решение. Изобразим на координатной плоскости Oxp решения данного неравенства. Для этого нарисуем параболу $p = x^2$ и прямую $p = 2 - x$, которые пересекаются в точках $(-2; 4)$ и $(1; 1)$. Так как

$$(p - x^2)(p + x - 2) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p \ge x^2, \\ p \le 2 - x \end{cases} \\ \begin{cases} p \le x^2, \\ p \ge 2 - x, \end{cases} \end{array}\right.$$

то решение неравенства представляет собой множество точек, лежащих внутри параболы под прямой и вне параболы над прямой (рис. 8).

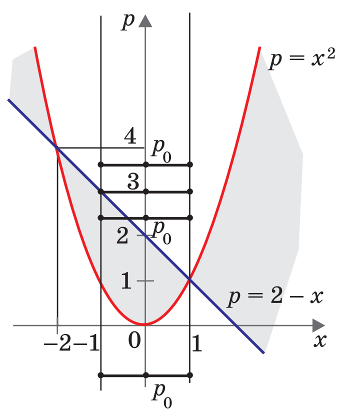


Рис. 8

Прямые $x = -1$ и $x = 1$ пересекают параболу $p = x^2$ в точках $(-1; 1)$ и $(1; 1)$ соответственно, а прямую $p = 2 - x$ в точке $(-1; 3)$ и той же точке $(1; 1)$. Условие задачи выполнено в том и только том случае, когда отрезок прямой $p = p_0$, заключенный между прямыми $x = -1$ и $x = 1$, не пересекает изображенное нами множество. Как видно из рисунка, это происходит только при $p_0 \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. Таким образом, все такие значения p будут служить ответом к задаче.

Ответ: $p \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Задача 9. Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (1 - 3a)x + 2a^2 \le 2$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 5 + a) \ge 0$.

Решение. Рассмотрим уравнение $x^2 + (1 - 3a)x + 2a^2 - 2 = 0$ как квадратное относительно x. Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (1 - 3a)^2 - 4(2a^2 - 2) = \\ = a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2,$$

поэтому корни уравнения равны

$$x = \frac{3a - 1 + a - 3}{2} = 2a - 2 \text{ и } x = \frac{3a - 1 - a + 3}{2} = a + 1.$$

Следовательно, первое неравенство из условия задачи равно неравенству

$$x^2 + (1 - 3a)x + 2a^2 \le 2 \Leftrightarrow (x - 2a + 2)(x - a - 1) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2a + 2 \ge 0, \\ x - a - 1 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2a + 2 \le 0, \\ x - a - 1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le \dfrac{x+2}{2}, \\ a \ge x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge \dfrac{x+2}{2}, \\ a \le x - 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, на координатной плоскости Oxa множество решений этого неравенства представляет собой два вертикальных угла, ограниченных прямыми $a = \dfrac{x+2}{2}$ и $a = x - 1$. Решение неравенства $ax(x - 5 + a) \ge 0$ при условии $ax \ge 0$ (I и III четверти) представляет собой множество точек, лежащих над прямой $a = 5 - x$, то есть таких, что $a \ge 5 - x$, а при условии $ax \le 0$ (II и IV четверти) — множество точек, лежащих под этой прямой, то есть $a \le 5 - x$ (рис. 9).

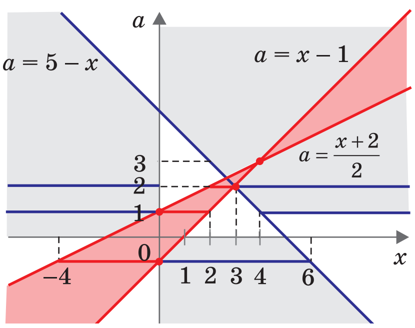


Рис. 9

Из рисунка видно, что существуют ровно четыре значения a, при которых выполнено условие задачи. При $a = 3$ решением первого неравенства является точка $x = 4$, которая также содержится и в решении второго неравенства. При $a = 2$ решением первого неравенства служит отрезок $x \in [2; 3]$, который имеет одну общую точку $x = 3$ с решением второго неравенства. При $a = 1$ отрезок $x \in [0; 2]$, являющийся решением первого неравенства, пересекается с объединением лучей $x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$, которое является решением второго неравенства, в единственной точке $x = 0$. И наконец, если $a = -1$, то решением первого неравенства служит отрезок $x \in [-4; 0]$, решением второго неравенства — отрезок $[0; 6]$, и эти отрезки имеют одну общую точку $x = 0$.

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = \pm 1$, $a = 2$, $a = 3$.

Ответ: $a = \pm 1$, $a = 2$, $a = 3$.

Задача 10. Найти все a, при каждом из которых любое решение неравенства

$$x^2 - (4a + 4)x + 3a^2 + 12a \le 0$$

удовлетворяет неравенству $x(x + a + 1) \ge 0$.

Решение. Рассмотрим уравнение $x^2 - (4a + 4)x + 3a^2 + 12a = 0$ как квадратное относительно x. Дискриминант этого уравнения равен

$$\frac{D}{4} = (2a + 2)^2 - \left(3a^2 + 12a\right) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2,$$

поэтому корни уравнения равны $x = 2a + 2 + a - 2 = 3a$ и $x = 2a + 2 - a + 2 = a + 4$. Следовательно, первое неравенство из условия задачи равносильно неравенству

$$x^2 - (4a + 4)x + 3a^2 + 12a \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 3a)(x - a - 4) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3a \ge 0, \\ x - a - 4 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3a \le 0, \\ x - a - 4 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le \dfrac{x}{3}, \\ a \ge x - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge \dfrac{x}{3}, \\ a \le x - 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, на координатной плоскости Oxa множество решений этого неравенства представляет собой два вертикальных угла, ограниченных прямыми $a = \dfrac{1}{3}x$ и $a = x - 4$. Решение неравенства $x(x + a + 1) \ge 0$ представляет собой, при условии $x \ge 0$ (I и IV четверти), множество точек, лежащих над прямой $a = -x - 1$, то есть таких, что $a \ge -x - 1$, а при условии $a \le 0$ (II и III четверти) — множество точек, лежащих под этой прямой, то есть $a \le -x - 1$ (рис. 10).

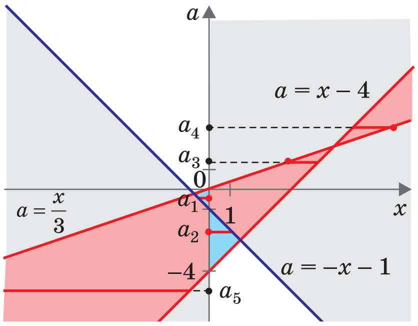


Рис. 10

Из рисунка видно, что при $a = -1$ решением второго неравенства является вся числовая прямая, то есть условие задачи выполняется. Если $a \in (-4; -1) \cup (-1; 0)$, то существуют решения первого неравенства, которые не являются решениями второго. На рисунке показаны такие решения, соответствующие значениям $a = a_1$ и $a = a_2$. Следовательно, все такие a не удовлетворяют условию задачи. При $a \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$ любое решение первого неравенства является также и решением второго. На рисунке показаны такие решения, соответствующие значениям $a = a_3$, $a = a_4$ и $a = a_5$. Значит, все такие a удовлетворяют условию задачи. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in (-\infty; -4] \cup \{-1\} \cup [0; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -4] \cup \{-1\} \cup [0; +\infty)$.

Задача 11. Найти все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение. Если $x \ge a^2$, то $f(x) = x^2 - 12x + 4a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 6$. Если же $x \le a^2$, то $f(x) = x^2 - 4x - 4a^2$, и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = 2$, ветви которой также направлены вверх. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис. 11).

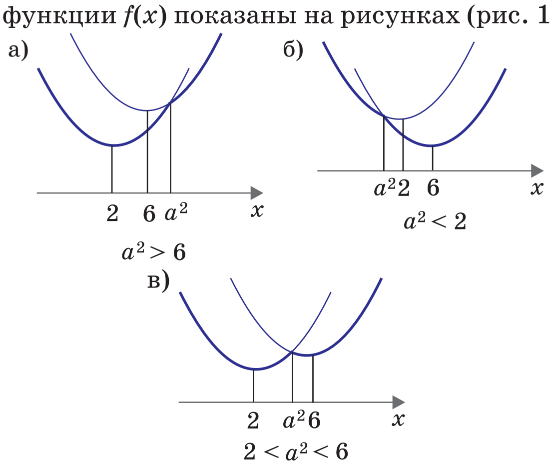


Рис. 11

Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно — три, в единственном случае (рис. 11,*в*):

$$2 < a^2 < 6 \Leftrightarrow a \in \left(-\sqrt{6}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{6}\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\sqrt{6}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \sqrt{6}\right)$.

Задача 12. Найти все значения a, при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет нечетное число общих точек с графиком функции

$$f(x) = (2a - 3)x - (x + 3)|x - a|.$$

Решение. Если $x \ge a$, то

$$f(x) = (2a - 3)x - (x + 3)(x - a) = -x^2 + (3a - 6)x + 3a,$$

поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = \frac{3}{2}a - 3$. Если же $x \le a$, то

$$f(x) = (2a - 3)x + (x + 3)(x - a) = x^2 + ax - 3a,$$

и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -\frac{1}{2}a$, ветви которой уже направлены вверх. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a; f(a))$. Все возможные положения графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис. 12).

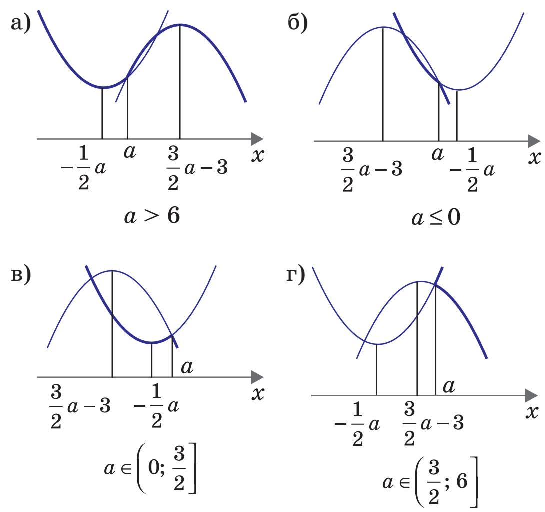


Рис. 12

Любая горизонтальная прямая пересекает график функции $y = f(x)$ в нечетном числе точек тогда и только тогда, когда функция монотонна на всей числовой прямой. Это происходит в единственном случае (рис. 12,*б*):

$$\frac{3}{2}a - 3 \le a \le -\frac{1}{2}a \Leftrightarrow a \le 0.$$

Ответ: $a \in (-\infty; 0]$.

Задача 13. Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = -x^2 + 5|x - a| - 3x$ на отрезке $[-6; 3]$

принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

Решение. Если $x \ge 0$, то

$$f(x) = -x^2 + 5(x - a) - 3x = -x^2 + 2x - 5a,$$

поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = 1$. Если же $x \le a$, то

$$f(x) = -x^2 - 5(x - a) - 3x = -x^2 - 8x + 5a,$$

и в этом случае график функции $f(x)$ представляет собой часть параболы с осью симметрии $x = -4$, ветви которой также направлены вниз. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a; f(a))$. Если точка $x = a$ не принадлежит интервалу $(-4; 1)$ (рис. 13, *а* и *б*), то функция $f(x)$ не имеет точек минимума, поэтому наименьшее значение этой функции на любом отрезке принимается на одном из концов этого отрезка. Следовательно, все такие значения a: $-\infty < a \le -4$, $1 \le a < +\infty$, удовлетворяют условию задачи.

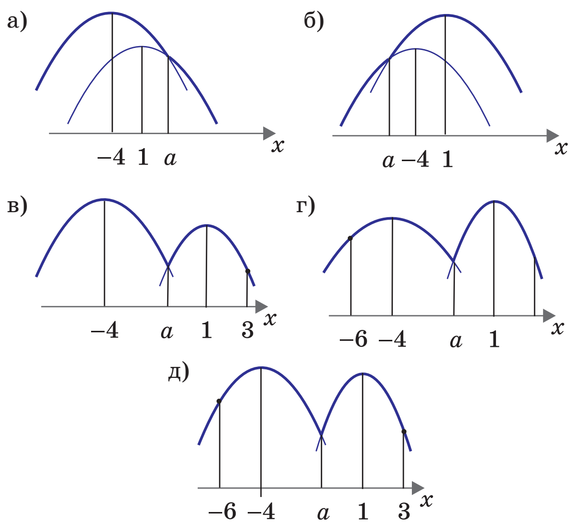


Рис. 13

В противном случае функция $f(x)$ имеет точку минимума (точка $x = a$), лежащую внутри интервала $(-4; 1)$. Если точка $x = a$ расположена не дальше от точки $x = 1$, чем точка $x = 3$, то значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ не меньше значения этой функции в точке $x = 3$ (рис. 13,*в*). Поэтому наименьшее значение функции на отрезке $[-6; 3]$ опять же принимается на одном из концов этого отрезка. Поэтому все такие a являются решениями задачи. Имеем:

$$\begin{cases} -4 < a < 1, \\ 1 - a \le 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < 1, \\ a \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-1; 1).$$

Аналогично, если точка $x = a$ расположена не дальше от точки $x = -4$, чем точка $x = -6$, то значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ не меньше значения этой функции в точке $x = -6$ (рис. 13,*г*). И в этом случае наименьшее значение функции на отрезке $[-6; 3]$ принимается на одном из концов этого отрезка, и все такие a удовлетворяют условию задачи. Имеем:

$$\begin{cases} -4 < a < 1, \\ a - (-4) \le -4 - (-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < 1, \\ a \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-4; -2].$$

Для всех остальных a значение функции $f(x)$ в точке минимума $x = a$ является наименьшим на отрезке $[-6; 3]$ (рис. 13,*д*), и условие задачи не выполняется. Объединяя все разобранные случаи, находим ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$.

Задача 14. Найти все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Первое уравнение данной системы задает на координатной плоскости Oxy две окружности радиуса 2 с центрами $C_1(5; 4)$ и $C_2(-5; 4)$. Обозначим эти окружности через ω_1 и ω_2 соответственно. При положительном значении параметра a второе уравнение системы задает окружность радиуса a с центром в точке $C(2; 0)$. Для того чтобы исходная система имела единственное решение, необходимо, чтобы последняя окружность касалась одной из окружностей ω_1 и ω_2. Обозначим такие окружности (а их всего четыре) через ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6 (в порядке возрастания их радиусов) и найдем эти радиусы (рис. 14).

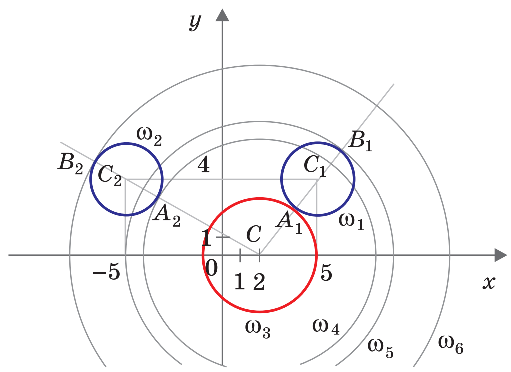


Рис. 14

Так как $CC_1 = 5$, то радиусы окружностей, имеющих центр в точке C и касающихся окружности ω_1, равны 3 и 7. Аналогично, $CC_2 = \sqrt{65}$, поэтому радиусы окружностей, имеющих центр в точке C и касающихся окружности ω_2, равны $\sqrt{65} \pm 2$. Так как $3 < \sqrt{65} - 2 < 7 < \sqrt{65} + 2$, то окружность ω_3 имеет радиус 3, окружность ω_4 — радиус $\sqrt{65} - 2$, окружность ω_5 — радиус 7 и окружность ω_6 — радиус $\sqrt{65} + 2$.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность с центром в точке (2; 0) имеет единственную точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2. Из рисунка видно, что этому условию удовлетворяют только окружности ω_3 и ω_6. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = 3$ и $a=\sqrt{65}+2$.

Ответ: $a = 3$, $a=\sqrt{65}+2$.

Задача 15. Найти все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-7)^2+(|y|-7)^2=1,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Первое уравнение данной системы при условии $xy > 0$ задает на координатной плоскости две единичные окружности с центрами (7; 7) и (–7; –7), а второе — прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку (0; 1). Для того чтобы исходная система имела единственное решение, необходимо, чтобы данная прямая касалась одной из окружностей. Таких касательных всего четыре. Обозначим их угловые коэффициенты через a_1, a_2, a_3 и a_4 (в порядке возрастания) и найдем их.

Прямая $y = ax + 1$ касается окружности единичного радиуса с центром в точке (–7; –7) тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x+7)^2+(y+7)^2=1\end{cases}$$

имеет единственное решение. Подстановкой данная система сводится к уравнению:

$$(x + 7)^2 + (ax + 1 + 7)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a^2 + 1)x^2 + 2(8a + 7)x + 112 = 0.$$

Из равенства нулю дискриминанта этого уравнения получаем:

$$(8a + 7)^2 - 112(a^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 48a^2 - 112a + 63 = 0 \Leftrightarrow a=\frac{14\pm\sqrt{7}}{12}.$$

Аналогично, прямая $y = ax + 1$ касается окружности единичного радиуса с центром в точке (7; 7) тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x-7)^2+(y-7)^2=1\end{cases}$$

имеет единственное решение. Эта система сводится к уравнению:

$$(x - 7)^2 + (ax + 1 - 7)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a^2 + 1)x^2 - 2(6a + 7)x + 84 = 0,$$

дискриминант которого равен

$$(6a + 7)^2 - 84(a^2 + 1) =$$
$$= 48a^2 - 84a + 35 = 0 \Leftrightarrow a=\frac{21\pm\sqrt{21}}{24}.$$

Так как

$$\frac{21-\sqrt{21}}{24}<\frac{14-\sqrt{7}}{12}<\frac{21+\sqrt{21}}{24}<\frac{14+\sqrt{7}}{12},$$

то

$$a_1=\frac{21-\sqrt{21}}{24},\qquad a_2=\frac{14-\sqrt{7}}{12},$$
$$a_3=\frac{21+\sqrt{21}}{24},\qquad a_4=\frac{14+\sqrt{7}}{12}$$

(рис. 15).

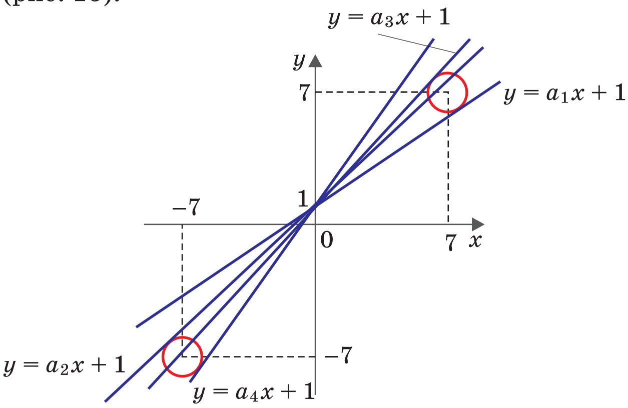


Рис. 15

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда прямая $y = ax + 1$ имеет с объединением двух рассмотренных окружностей ровно одну общую точку. Из рисунка видно, что таких прямых всего две — это прямые с угловыми коэффициентами a_1 и a_4. Таким образом, ответом к задаче будут служить

$$a=\frac{21-\sqrt{21}}{24} \text{ и } a=\frac{14+\sqrt{7}}{12}.$$

Ответ: $a=\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$, $a=\dfrac{14+\sqrt{7}}{12}$.

Задача 16. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}2xy-ax-2ay+a^2-2=0,\\ 4x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases}2xy-ax-2ay+a^2-2=0,\\ 4x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2y-a)(x-a)=2,\\ 4(x-a)^2+(2y-a)^2=12a^2+20a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(y-\frac{a}{2}\right)(x-a)=1,\\ (x-a)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=3a^2+5a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'y'=1,\\ x'^2+y'^2=3a^2+5a,\end{cases}$$

где $x' = x - a$, $y'=y-\frac{a}{2}$. Последняя (а значит, и исходная) система имеет ровно два различных решения тогда и только тогда, когда окружность $x'^2+y'^2=3a^2+5a$ касается гиперболы $x'y' = 1$ в точках (1; 1) и (–1; –1) (рис. 16).