3. Kettenregel

Betrachtet wird die Funktion

$$f : x \longmapsto \sin(x^2 + x),$$

die als Verkettung der Funktionen $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = x^2 + x$ aufgefasst werden kann.
Um die Ableitung zu bilden, benötigen wir den Differentialquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{h(x) - h(x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

$$\overset{\text{DEF}}{=} g'(h(x_0)) \cdot \underbrace{h'(x_0)}_{\text{Nachdifferenzieren}}$$

Damit folgt für die Funktion $f : x \longmapsto \sin(x^2 + x)$, dass

$$f'(x) = \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

MERKE

Ist $f : x \longmapsto g(h(x))$ die Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen g und h, so ist auch f differenzierbar, und es gilt

$$f' : x \longmapsto g'(h(x)) \cdot h'(x)$$