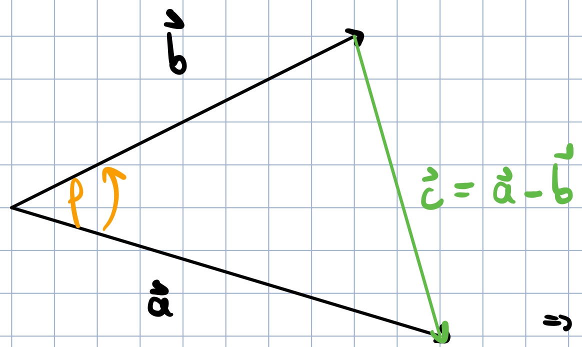
6. Skalarprodukt

Gesucht ist der Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$



__Kosinussatz:__ $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right|^2 + \left| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow -2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2\,|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow -2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \qquad |:(-2)$$

$$\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\overset{\text{DEF}}{\Rightarrow} \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

DEFINITION

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so heißt die reelle Zahl

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ das __Skalarprodukt__ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Damit folgt für den __Winkel__

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{a_1 \cdot b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Ist $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, so ist $\varphi = 90^\circ$.