Arbeitsblatt **Mathematik**
Klasse Datum Schoepe

Lösen von Determinanten

$\mathbf{2\times 2}$-*Determinanten*

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \mathrm{a}\cdot d - b\cdot c$ (Hauptdiagonale $\searrow$ minus Nebendiagonale $\swarrow$)

Beispiel: $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)-(-4)\cdot 2 = -15+8 = -7$

$\mathbf{3\times 3}$-*Determinanten*

Hier gibt es mehrere Lösungswege:

Erste Möglichkeit: Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen $\searrow + \searrow + \searrow - \swarrow - \swarrow - \swarrow$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \overbrace{a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h}^{\text{Hauptdiagonalen}} - \underbrace{a\cdot f\cdot h - b\cdot d\cdot i - c\cdot e\cdot g}_{\text{Nebendiagonalen}}$$

Beispiel: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 3\cdot 3\cdot 6 + (-1)\cdot(-2)\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 0 - 3\cdot(-2)\cdot 0 - (-1)\cdot 4\cdot 6 - 2\cdot 3\cdot 1 = \\ &= 54+2+0-0-(-24)-6 = 74 \end{aligned}$

Zweite Möglichkeit: Entlang einer Zeile oder einer Spalte „entwickeln“

Dazu muss man sich folgendes Vorzeichenschema vor Augen halten:

für 3×3-Determinanten: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ für 4×4-Determinanten: $\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$ u.s.w.

Rezept:

1. Man sucht eine Zeile oder Spalte heraus, am besten eine mit vielen Nullen oder Einsen.
2. Die erste Zahl dieser Zeile oder Spalte wird mit dem Vorzeichen aus einem der oben stehenden Vorzeichen-Schemata versehen.
3. Dann werden sowohl die Zeile als auch die Spalte, in der diese Zahl steht, weggestrichen. Im Falle einer 3×3-Determinanten bleibt dann – neben der einzelnen Zahl – eine 2×2-Determinante übrig. Diese wird mit der herausgesuchten Zahl multipliziert.
4. Nun wird dieser Vorgang mit den anderen Zahlen der jeweils gewählten Zeile oder Spalte wiederholt und addiert:

Beispiel: Wenn man die Determinante von oben zum Beispiel an der dritten Zeile entwickelt, dann ergeben sich folgende Matrizen: $\begin{vmatrix} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ 1 & & \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & & \mathbf{-2} \\ & 0 & \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \\ & & 6 \end{vmatrix}$

also $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= +1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 1\cdot(2-6) - 0 + 6\cdot(9-(-4)) = 74 \end{aligned}$

Man sieht hier, dass die zweite 2×2-Determinante wegen der Multiplikation mit Null wegfällt. Es ist daher immer günstig, Zeilen oder Spalten mit Nullen zu suchen.

Der Vorteil dieser Methode ist, dass sie sich auch für 4×4- und größere Determinanten anwenden lässt.

Lösen eines Gleichungssystems mit Hilfe von Determinanten

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem: $\begin{matrix} a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = a_0 \\ b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_n \cdot x_n = b_0 \\ c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n = c_0 \\ \vdots \end{matrix}$

Die Lösung dieses Gleichungssystems bedeutet einen Satz von Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu finden, mit dem jede der Gleichungen in oben stehendem Gleichungssystem eine wahre Aussage ergibt. Das lässt sich mit dem Gauß'schen Algorithmus lösen, aber in vielen Fällen geht das mit Determinanten bequemer.

Das oben stehende Gleichungssystem lässt sich in einer Koeffizientenmatrix schreiben:

$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & b_0 \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n & c_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$ daraus lassen sich folgende Determinanten bilden:

$$Det_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}, \quad Det(x_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_0} & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \boldsymbol{b_0} & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \\ \boldsymbol{c_0} & c_2 & c_3 & \ldots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}, \quad Det(x_2) = \begin{vmatrix} a_1 & \boldsymbol{a_0} & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & \boldsymbol{b_0} & b_3 & \ldots & b_n \\ c_1 & \boldsymbol{c_0} & c_3 & \ldots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$Det(x_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & \boldsymbol{a_0} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & \boldsymbol{b_0} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & \boldsymbol{c_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

D.h. bei Det_i wird jeweils die i-te Spalte durch die rechte Spalte der Koeffizientenmatrix ersetzt, mit $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Die Lösung des Gleichungssystems ist nun folgende:

$x_1 = \frac{Det(x_1)}{Det_0}$, $x_2 = \frac{Det(x_2)}{Det_0}$, $x_3 = \frac{Det(x_3)}{Det_0}$ u.s.w.

Beispiel: 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

Gegeben ist das Gleichungssystem: $\begin{matrix} 4 \cdot a + 3 \cdot b & = 7 \\ -6 \cdot a + 2 \cdot b & = 9 \end{matrix}$ also $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 7 \\ -6 & 2 & 9 \end{array}\right)$

$Det_0 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 8 - (-18) = 26$, $Det(a) = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 27 = -13$ und $Det(b) = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - (-42) = 78$

also: $a = \frac{-13}{26} = -\frac{1}{2}$ und $b = \frac{78}{26} = 3$

Beispiel: 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

Gegeben ist das Gleichungssystem: $\begin{matrix} 3x + 5y - 2z = 0 \\ -5x - 12y + 3z = 3 \\ 4y + 3z = 2 \end{matrix}$ also $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & -12 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

dann ist $Det_0 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -5 & -12 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = -29$, $Det(x) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 3 & -12 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = -87$, $Det(y) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = 29$

und $Det(z) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -5 & -12 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -58 \quad \Rightarrow x = \frac{-87}{-29} = 3$, $y = \frac{29}{-29} = -1$ und $z = \frac{-58}{-29} = 2$

Weitere Beispiele

$$\begin{pmatrix} 3a & + & 3b & + & 2c & - & d & = & -1 \\ -2a & + & 2b & + & c & + & d & = & 0 \\ 5a & + & 2b & - & c & + & 2d & = & 12 \\ 6a & + & b & - & 2c & & & = & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 2 & 12 \\ 6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ Entwickeln an der letzten (blauen) Spalte mit $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Det_0 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

mit Hauptdiagonalen minus Nebendiagonalen

$$\Rightarrow (8-12+5-2+20-12)+(-12-18+10+3+30-24)-2\cdot(-12+18-4-3-12-24)$$
$$= 7-11-2\cdot(-37) = 70$$

$$Det(a) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 12 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (0-2+12-0+48-2)+(4-3+24-1+72-4)-2\cdot(4+3+0+1+0-4)$$
$$= 56+92-2\cdot 4 = 140$$

d.h. $a = \dfrac{Det(a)}{Det_0} = \dfrac{140}{70} = \underline{\underline{2}}$

$$Det(b) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 12 & -1 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 12 & -1 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 12 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (48+0+5-2-0-72)+(-72+6+10+3-10-144)-2\cdot(0-6-4-3+4-0)$$
$$= -21-207-2\cdot(-9) = -210$$

d.h. $b = \dfrac{Det(b)}{Det_0} = \dfrac{-210}{70} = \underline{\underline{-3}}$

usw.