Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 17 - aplicar partes de manera consecutiva

1. Calcula $\int x^2 \cdot \cos(x)\,dx$

Aplicamos partes.

$$u=x^2 \rightarrow du=2x$$
$$dv=\cos(x) \rightarrow v=sen(x)$$

Y la integral queda:

$$I=x^2\cdot sen(x)-2\int x\cdot sen(x)dx$$

Aplicamos nuevamente partes en la nueva integral.

$$u=x \rightarrow du=1$$
$$dv=sen(x) \rightarrow v=-\cos(x)$$

$$I=x^2\cdot sen(x)-2[-x\cos(x)+\int \cos(x)dx]$$
$$I=x^2\cdot sen(x)+2x\cos(x)-2\int \cos(x)dx=x^2\cdot sen(x)+2x\cos(x)-2\,sen(x)+C$$

2. Sea $f''(x)=\ln(x)$. Obtener $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el $(1,0)$ y que la pendiente de la recta tangente a la función en $x=2$ es igual 1 .

Nos dan la segunda derivada. Deberemos **integrar dos veces para obtener la función primitiva** $f(x)$. Al integrar dos veces aparecerán dos constantes de integración, cuyo valor vendrá determinado por las condiciones del enunciado.

$f'(x)=\int \ln(x)\,dx$ → Integramos por partes → $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$

$$u(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=1 \quad \rightarrow \quad v(x)=x$$

$$f'(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

Si la pendiente de la recta tangente en $x=2$ es igual a 1 , significa que $f'(2)=1$.

$$2\cdot\ln(2)-2+C=1 \quad \rightarrow \quad C=3-2\cdot\ln(2)$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx \quad \rightarrow \quad f(x)=\int (x\cdot\ln(x)-x+C)\,dx$$

$$f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\int x\,dx+\int C\,dx$$

$$f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\frac{x^2}{2}+C\,x+D$$

Aplicamos partes en la integral que hemos obtenido.

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=x \quad \rightarrow \quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$f(x)=\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\int \frac{x}{2}\,dx-\frac{x^2}{2}+C\,x+D$$

$$f(x)=\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+C\,x+D$$

Si la gráfica pasa por el punto $(1,0)$, significa que $f(1)=0$.

$$\frac{\ln(1)}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+C+D=0 \quad \rightarrow \quad -\frac{3}{4}+C+D=0 \quad \rightarrow \quad D=\frac{3}{4}-C$$

Por lo que la función resulta (no olvides colocar el argumento del logaritmo entre valor absoluto):

$$f(x)=\frac{x^2\cdot\ln|x|}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+C\,x+\frac{3}{4}-C$$

$$f(x)=\frac{x^2\cdot\ln|x|}{2}-\frac{3\,x^2}{4}+(3-2\cdot\ln(2))\,x+\frac{3}{4}-3+2\cdot\ln(2)$$

3. Resuelve $\int x^2 e^{2x} dx$

Integramos por partes → $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$

$$u(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^{2x} \quad \rightarrow \quad v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx$$

Volvemos a aplicar partes → $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$

$$u(x) = x \quad \rightarrow \quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{2x} \quad \rightarrow \quad v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - [\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx] = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - x + \frac{1}{2}) + C$$

4. Resolver $\int x^3 \cdot e^x \, dx$ **.**

Aplicamos partes.

$$u = x^3 \quad \rightarrow \quad du = 3x^2 \, dx$$

$$dv = e^x \, dx \quad \rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = x^3 \cdot e^x - 3 \cdot \int x^2 \cdot e^x \, dx$$

Nuevamente aplicamos partes.

$$u = x^2 \quad \rightarrow \quad du = 2x \, dx$$

$$dv = e^x \, dx \quad \rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6 \cdot \int x \cdot e^x \, dx$$

Y partes por tercera vez para terminar.

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^x \, dx \quad \rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6 \cdot x \cdot e^x - 6 \cdot \int e^x \, dx$$

$$I = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6 \cdot x \cdot e^x - 6 \cdot e^x + C$$

$$I = e^x (x^3 - 3x^2 + 6 \cdot x - 6) + C$$

5. Resuelve $\int e^{2x}\left(x^3+5x^2-2\right)dx$

Aplicamos partes:

$$u=x^3+5x^2-2\rightarrow\rightarrow\rightarrow du=(3x^2+10x)dx$$
$$dv=e^{2x}dx\rightarrow\rightarrow\rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}$$
$$\int udv=uv-\int vdu$$

Sustituimos:

$$\int e^{2x}\left(x^3+5x^2-2\right)dx=\left(x^3+5x^2-2\right)\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}(3x^2+10x)dx$$

Aplicamos partes en la nueva integral que aparece.

$$u=3x^2+10x\rightarrow\rightarrow\rightarrow du=(6x+10)dx$$
$$dv=\frac{1}{2}e^{2x}dx\rightarrow\rightarrow\rightarrow v=\frac{1}{4}e^{2x}$$
$$\int e^{2x}(3x^2+10x)dx=\left(3x^2+10x\right)\frac{1}{4}e^{2x}-\int\frac{1}{4}e^{2x}(6x+10)dx$$

Donde obtenemos una nueva integral que necesita partes en su resolución:

$$u=6x+10\rightarrow\rightarrow\rightarrow du=6dx$$
$$dv=\frac{1}{4}e^{2x}dx\rightarrow\rightarrow\rightarrow v=\frac{1}{8}e^{2x}$$
$$\int\frac{1}{4}e^{2x}(6x+10)dx=\left(6x+10\right)\frac{1}{8}e^{2x}-\int\frac{1}{8}e^{2x}6dx=\left(6x+10\right)\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{6}{16}e^{2x}$$

Unificando todos los resultados en la integral I de partida:

$$I=\left(x^3+5x^2-2\right)\frac{1}{2}e^{2x}-\left[\left(3x^2+10x\right)\frac{1}{4}e^{2x}-\left(\left(6x+10\right)\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{6}{16}e^{2x}\right)\right]+C\quad\rightarrow\text{ factor común}$$

$$I=\left(x^3+5x^2-2\right)\frac{1}{2}e^{2x}-\left(3x^2+10x\right)\frac{1}{4}e^{2x}+\left(6x+10\right)\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{6}{16}e^{2x}+C$$

$$I=e^{2x}\left[\frac{x^3+5x^2-2}{2}-\frac{\left(3x^2+10x\right)}{4}+\frac{\left(6x+10\right)}{8}-\frac{6}{16}\right]+C$$

$$I=\frac{1}{8}e^{2x}\left(4x^3+14x^2-14x-1\right)+C$$

6. Resuelve $\int x^2 \cdot sen(3x)\,dx$

Aplicamos partes:

$u(x)=x^2 \quad \rightarrow \quad u'(x)=2x$

$v'(x)=sen(3x) \quad \rightarrow \quad v(x)=\frac{-1}{3}\cos(3x)$

$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$

$I=\frac{-1}{3}\cos(3x)\cdot x^2+\frac{2}{3}\int x\cdot\cos(3x)\,dx$

La nueva integral $\int x\cdot\cos(3x)\,dx$ también se resuelve por partes.

$u(x)=x \quad \rightarrow \quad u'(x)=1$

$v'(x)=\cos(3x) \quad \rightarrow \quad v(x)=\frac{1}{3}sen(3x)$

$I=\frac{-1}{3}\cos(3x)\cdot x^2+\frac{2}{3}[\frac{1}{3}\cdot x\cdot sen(3x)-\frac{1}{3}\int sen(3x)\,dx]$

$I=\frac{-1}{3}\cos(3x)\cdot x^2+\frac{2}{9}\cdot x\cdot sen(3x)+\frac{2}{27}\cos(3x)+C$