

Teoría – Tema 6

CCSS - Teoría - 1b - Definición formal de derivada

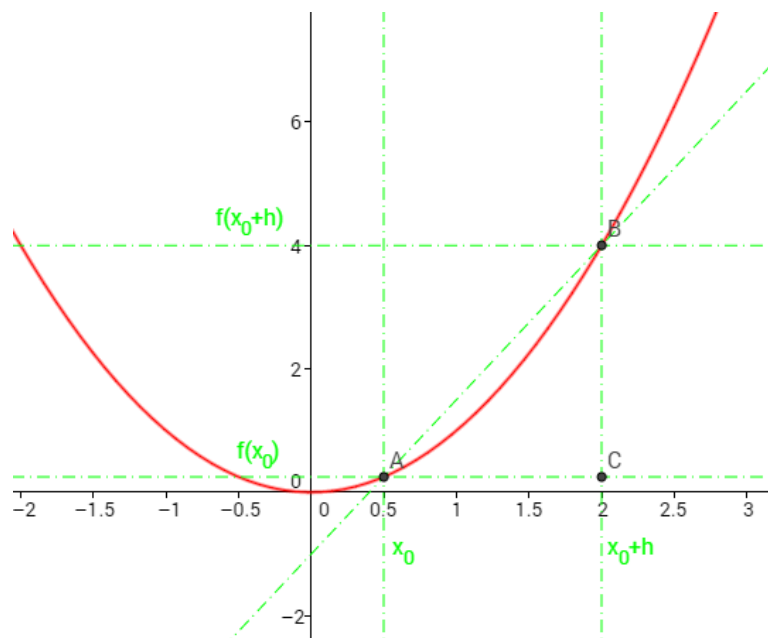
Incremento medio e incremento instantáneo de una función $f(x)$

Vamos a acercarnos al concepto de derivada de una función.

Supongamos una función genérica $f(x)$ y un punto x_0 perteneciente al dominio de la función. Consideremos una cantidad $h > 0$. Podemos definir la tasa de variación media o el **incremento medio de la función $f(x)$** para el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ de la forma:

$$\text{Incremento medio de } f(x) \text{ en } [x_0, x_0 + h] = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

----- $f(x)$ arbitrario



Del triángulo rectángulo ABC representado en la gráfica podemos ver el incremento medio de $f(x)$ en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ como el cociente entre la altura y la base del triángulo.

Altura $\rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0)$

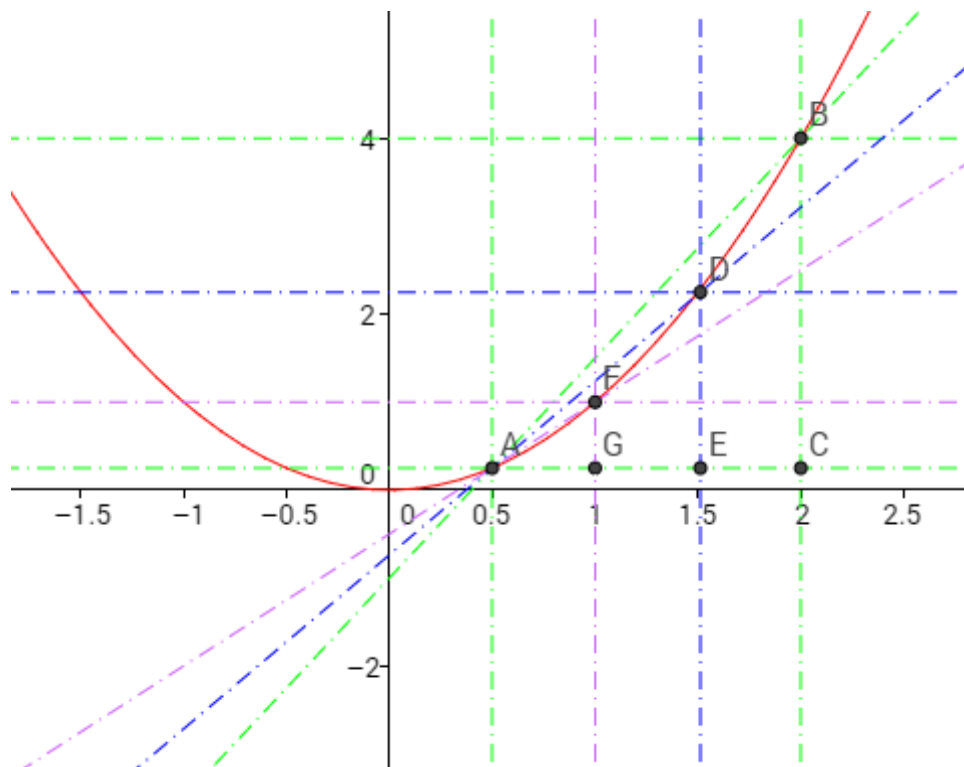
Base $\rightarrow x_0 + h - x_0 = h$

Es más, si consideramos el ángulo del vértice A podemos ver el incremento medio de $f(x)$ como la tangente del ángulo A.

$$\operatorname{tg}(A) = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado contiguo}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si tomamos valores de h cada vez más pequeños, el valor $x_0 + h$ se acercará progresivamente a x_0 .

----- $f(x)$ arbitrario



Es fácil intuir que en el caso límite $h \rightarrow 0$ tendremos $x_0 + h \rightarrow x_0$, y la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ ya no cortará a la gráfica de $f(x)$ en dos puntos sino únicamente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Para $h \rightarrow 0$ ya no hablamos de incremento medio sino de **incremento instantáneo de $f(x)$** .

Es decir, en el caso límite $h \rightarrow 0$ la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ será tangente a $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ y su pendiente (tangente del ángulo A) será igual al valor del incremento instantáneo de $f(x)$.

$$\text{Incremento instantáneo de } f(x) \text{ en } x_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Para un punto genérico x este incremento instantáneo de $f(x)$ es su derivada. Y su **interpretación geométrica nos dice que la derivada de $f(x)$ en el punto genérico x es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto x .**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leftrightarrow \frac{d[f(x)]}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esta expresión se conoce como definición formal o analítica de la derivada de $f(x)$. **Si una función es derivable en x_0 también será continua en x_0 . El inverso, no siempre es cierto.**

Un ejemplo de aplicación de la definición formal de derivada

Vamos a aplicar, a modo de ejemplo, la definición formal de derivada a la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

Recordamos la definición analítica de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aplicado a nuestra función.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x-x-h}{x \cdot (x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{x \cdot (x+h) \cdot h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{x \cdot (x+h)} : \frac{h}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{xh \cdot (x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x \cdot (x+h)}$$

Evaluamos el límite (fíjate que la variable del límite es h y no x).

$$f'(x) = \frac{-1}{x \cdot (x+0)} = \frac{-1}{x^2}$$

Por lo tanto.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Realizar este proceso para derivar cualquier función es largo, tedioso y puede convertirse en un proceso nada trivial. Por eso recurriremos a las famosas **tablas de derivación**, para aprender la forma de las derivadas de las funciones y de la composición de funciones más usuales.