Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto

Proposta de um GeoGebra Book para o Ensino de Probabilidade através do Problema de Monty Hall

Belo Horizonte
2022

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto

PROPOSTA DE UM GEOGEBRA BOOK PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE ATRAVÉS DO PROBLEMA DE MONTY HALL

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora
Marcela Richele Ferreira

Coorientador
Dênis Emanuel da Costa Vargas

Banca Examinadora
Gilmer Jacinto Peres
Rodrigo Luiz Pereira Lara
Saulo Furletti

Belo Horizonte
2022

Ficha Catalográfica

Copie o arquivo

`ficha_catalografica.pdf`

fornecido pela CEFET-MG para a pasta do trabalho e a ficha catalográfica será automaticamente incluída aqui.

Para substituir a página de assinaturas pelo aquivo escaneado com as assinaturas, crie o arquivo

`assinaturas.pdf`

e copie-o na pasta do trabalho. Ele substituirá a página de assinaturas.

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto

PROPOSTA DE UM GEOGEBRA BOOK PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE ATRAVÉS DO PROBLEMA DE MONTY HALL

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Edilberto Antenor de Rezende Paiva Neto
(Autor)

Marcela Richele Ferreira
(Orientadora)

Belo Horizonte
2022

Agradecimentos

Aos notáveis, mas que se faça notar a diferença que fazemos, nós mesmos, à este mundo...

Por vezes pensei à quem e aos quais agradecer, porém peço licença para começar agradecendo à mim mesmo. Obrigado! Obrigado por não desistir, por se dedicar, por acreditar em si mesmo, pois esse é o maior dos incentivos que possa ter! Se chegou até aqui foi porque você quis e acreditou ser possível!

Na maior parte do tempo nos cobramos demasiadamente. Por vezes não nos damos o valor e o crédito por nossas ações e iniciativas. Sejamos instrumento! Instrumentos para um mundo melhor, reprodutores de sorrisos, colecionadores de momentos, inspirações e inspirados, nunca fracassados. Se não deu certo hoje, amanhã o será! Não há falhas nessa terra, mas sim oportunidades de aprendizagens e ressignificações. Ressignifiquemos o amor!

Amo a vida, meus pais, irmãos, minha família seja ela de sangue ou não. Aos anjos que tenho lá de cima me iluminando, minha eterna saudade! Aos colegas de percurso, a minha gratidão e cumplicidade! Aos professores e orientadores, obrigado pelos conselhos, ensinamentos e exemplos de profissionais e de pessoas. Aos meus alunos e colegas de profissão, agradeço pela aprendizagem e trocas de experiências diárias. À minha companheira de vida, pelo suporte e incentivo. Aos familiares, a base de tudo, razão da minha existência e perseverança, lhes devo a vida. Aos amigos, aqueles que nem preciso citar, o verdadeiro sentido do verbo amar! Amo vocês! Meu muito obrigado à todos!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

A Probabilidade é parte integrante do dia a dia da sociedade, sejam em situações simples, como na ocorrência ou não de determinados eventos, ou mais complexas, como a tomada de decisões que necessitem de um raciocínio lógico envolvido. A sua compreensão e entendimento são, portanto, de suma importância dentro e fora do ambiente escolar. Assim sendo, foram pesquisadas formas interessantes e relevantes para abordagem deste conteúdo de maneira dinâmica e lúdica, optando-se por sua aplicação em jogos com viés educacional. Dessa maneira, o presente trabalho tem como objetivo abordar a utilização do Problema de Monty Hall (PMH), amplamente discutido no meio acadêmico, como plano de fundo para melhorar a compreensão e assimilação de conceituações e propriedades probabilísticas. Para tal finalidade, foi desenvolvido um GeoGebra Book, composto por materiais teóricos que apresentam diferentes níveis de complexidade com relação ao conteúdo de Probabilidade. O livro digital conta ainda com exemplos resolvidos da sua contextualização em jogos, tais como dados e baralhos, e com *applets* que permitem a sua aplicação, por meio de jogos com uma adaptação e expansões do PMH para mais portas. O produto final criado servirá como um material de apoio para alunos e professores do Ensino Médio, ou até mesmo entusiastas pela temática. O *e-book* desenvolvido alia os fundamentos probabilísticos aplicados com a utilização de jogos, buscando estimular nos usuários a formação e/ou consolidação de conceitos para resoluções de problemas do seu cotidiano.

Palavras-chave: Probabilidade. Jogos na educação. Problema de Monty Hall. Problema de Monty Hall estendido. GeoGebra Book.

Abstract

The concept of Probability is part of a society's day-to-day, whether it is in simple situations, for instance event occurrence; or more complex circumstances, like decision-making processes that require logical thinking. Therefore, understanding probability is fundamental both in and outside the academic environment. That way, we have explored interesting and relevant ways to deal with this subject in a dynamic and playful approach, choosing to apply it on educational-biased games. Thus, the present study uses the Monty Hall Problem (MHP), greatly discussed by scholars, as a background to improve assimilation and comprehension of probability conceptions and properties. In doing so, we have developed a GeoGebra Book, made of theoretical materials involving diverse complexity levels of probability content. In addition, the digital book includes solved exercises in games, such as dice and cards, as well as applets that allow its use through adapted games and PMH expansion into other doors. The final product will serve as support material for high school students and teachers, or anyone enthusiastic about the topic. The proposed e-book connects applied probability axioms to game playing; encouraging users to foster and enhance concepts that will help them solve problems on a daily basis.

Keywords: Probability. Games in education. Monty Hall Problem. Extended Monty Hall Problem. Geogebra book.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Teoria da Probabilidade

O cotidiano das pessoas está cercado de incertezas e aleatoriedades. Várias são as situações do dia a dia em que o acaso está presente. Frequentemente, escuta-se sobre a probabilidade de chover ou não em determinado local, dia e horário. Também é muito comum, dúvidas com relação aos possíveis sexos de uma ninhada de um cachorro, tendo em vista a maior valia de fêmeas. Normalmente podem surgir momentos nos quais tomadas de decisões, ocorrem em contextos de indeterminação. Tais situações podem ser simples, como escolher virar à direita ou à esquerda em um caminho desconhecido, ou até mesmo mais complexas, como selecionar a resposta numa questão de múltipla escolha com cinco alternativas, sem examiná-las, ou ainda, escolher os números de um jogo da Mega-Sena, por exemplo. Uma medida que expressa matematicamente tais incertezas é chamada de Probabilidade. O ramo da Matemática que formaliza e analisa esses eventos aleatórios é conhecido como Teoria da Probabilidade (TP).

Na TP são examinadas, discutidas e estudadas situações que envolvem a incerteza, com intuito de modelar estes tipos de eventos. Um exemplo seriam os jogos de azar que se utilizam de cartas e/ou dados. Segundo o famoso matemático e astrônomo francês Laplace (Laplace[1], 1902 apud Ross[2], 2010), "a teoria da probabilidade é no fundo somente o senso comum reduzido ao cálculo. (...) É extraordinário que esta ciência, que surgiu da análise dos jogos de azar, tenha se tornado, o mais importante objeto do conhecimento humano."

A Teoria da Probabilidade consiste em

> reduzir todos os eventos do mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, isto é, aqueles sobre os quais podemos estar igualmente indecisos quanto à sua existência e em determinar o número de casos favoráveis ao evento cuja probabilidade é buscada. A razão desse número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, que é simplesmente uma fração, cujo numerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o número de todos os casos possíveis. [1, p.6-7][1].

[1]Tradução obtida em https://translate.google.com.br/.

A seguir, serão apresentados os seguintes aspectos da Teoria da Probabilidade, objeto matemático a ser estudado neste trabalho: um breve histórico sobre o surgimento da TP; seus principais elementos, conceitos e propriedades; além de alguns exemplos matemáticos formais e do cotidiano, que servirão de base para a interpretação e resolução do Problema de Monty Hall.

1.1 Breve Histórico

A história da Matemática vem sendo cada vez mais estudada e explorada. Contudo, com relação ao campo da Teoria da Probabilidade, os trabalhos desenvolvidos não se comparam aos realizados em outras áreas, segundo Viali [3]. De acordo com o autor, são dois os fatores complicadores para se traçar uma perspectiva do desenvolvimento e evolução da Probabilidade: a escassez de materiais encontrados acerca da temática e o fato de que, quando existem, atrelam a Probabilidade junto à Estatística. Assim sendo, será apresentado o cenário da evolução do cálculo de probabilidades até o estabelecimento da TP propriamente dita.

O surgimento da TP, como qualquer outra teoria, não ocorreu por acidente. Para Viali [3], o seu desenvolvimento está associado ao esforço contínuo de se eliminar o acaso como justificativa da origem de tudo o que acontece. A origem da Teoria da Probabilidade não é exatamente precisa, mas como ciência empírica surgiu há muito tempo, como apresentada a seguir.

Conceitos rudimentares de probabilidade, acaso e aleatoriedade apareceram desde a Antiguidade perpassando a Idade Média, de acordo com Hald [4]. Tais conceitos estavam relacionados com "jogos de azar, sortilégio, leitura da sorte, filosofia, leis, seguros, inspeção de amostragem e erros de previsão em várias ciências, como por exemplo, astronomia e medicina" ([4, p.29], tradução nossa).

Corroborando, Vialli [3] acredita que as primeiras aplicações probabilísticas tiveram origem nas tentativas de se quantificar as possibilidades de se vencer em jogos de azar e de se calcular os riscos referentes a acidentes, mortes, entre outros sinistros. O termo "azar" neste caso, se remete a "acaso" e não a "má sorte", como usualmente é utilizado.

Como sugerido por Hald [4] e Viali [3], o aparecimento das primeiras manifestações probabilísticas aconteceram por meio dos jogos de um tipo de dado. Conhecido como Tali, o jogo do osso era praticado desde a Antiguidade com astrágalos, um precursor do dado atual, vide Figura 1.1. O astrágalo era formado por um osso animal, possivelmente de carneiro que era similar a um tetraedro de faces não regulares. Devido a irregularidade das faces, ou seja, não eram idênticas, as frequências de ocorrência de cada uma delas era diferente. As faces recebiam numerações de tal modo que as duas menores recebiam os números 1 e 6, e as duas maiores eram numeradas com 3 e 4. Além de apostas, o Tali era usado em previsões, decisões de disputas e divisão de heranças.

Figura 1.1: Astragálos de origem animal, usados como dados primitivos.

Fonte: https://brasildelonge.com/tag/astragalo/.

Outra prática, apontada por Hald [4] e Viali [3], que utilizava princípios da probabilidade eram os seguros, iniciados provavelmente pelos fenícios e mesopotâmios. Seguido por gregos e romanos, a prática de comércio segurado chegou ao mundo moderno. Os autores especulam que as antigas seguradoras utilizavam técnicas empíricas para estimar possibilidades de naufrágios, acidentes e roubos. Após a Idade Média, com o crescimento dos centros urbanos, foi popularizado os seguros de vida. Em torno deste modelo de negócio, surgiram os primeiros estudos matemáticos.

Segundo Silva [5], não existe prova da criação de modelos matemáticos e nem da formalização dos conceitos de probabilidade, até por volta do fim do século XV e início do século XVI. Alguns estudiosos italianos se destacaram nos cálculos probabilísticos, indo além da mera enumeração e comparação de possibilidades na resolução de problemas. Em seguida, os franceses trouxeram grande contribuição difundindo e formalizando as descobertas até chegar aos estudiosos contemporâneos de maneira global. Os principais estudiosos e suas contribuições fundamentais no surgimento e desenvolvimento da TP estão listados a seguir, segundo referências em Hald [4], Viali [3], Paulo [6] e Silva [5].

- **Luca Pacioli (1455-1517)**: Resumiu toda a Matemática conhecida até a época em sua obra *Summa*, incorporando o trabalho *Liber Abaci* de Fibonacci. Propôs uma solução para o problema da divisão de apostas, conhecido como Problema dos Pontos[2], porém incorreta.

- **Niccolo Fontana (1500-1557)**: Tartaglia como era mais conhecido, aparece associado ao "Triângulo de Pascal" e seu trabalho mais famoso, *General Trattato*, discutia amplamente operações numéricas e unidades de medida. Também chegou à uma solução para o Problema dos Pontos, argumentando que a divisão deveria ser 5 : 3, dando um enfoque de proporcionalidade à questão, que também não é correta.

- **Girolamo Cardano (1501-1576)**: Estudou as probabilidades associadas ao lançamento de 2 dados, concluindo que a distribuição de probabilidades é obtida através dos 36 pares ordenados e, não exclusivamente, dos 21 pares não-ordenados. Seus principais projetos foram os livros *Liber de Ludo Aleae*, um manual de jogos de azar, e *Ars Magna*, no qual apresentava métodos de resoluções de equações de terceiro e quarto graus.

- **Galileo Galilei (1564-1642)**: Autor de outro manual sobre jogos, *Sopra le Scoperta dei Dadi*, que analisa entre outros assuntos, o lançamento de 3 dados e explica o fato de que a probabilidade da soma ser 9 é menor que a soma ser 10, sendo que ambas apresentam 6 combinações de trios não ordenados.

- **Pierre de Fermat (1601-1665)**: Contribuiu significativamente com a Geometria reconstruindo as principais ideias da obra de Apolônio. Atribui-se a ele o estabelecimento da Geometria Analítica. Além disso, suas correspondências com inúmeros matemáticos importantes da Europa do século XVII, tais como Torricelli, Huygens e, principalmente, Pascal, estabeleceram os alicerces da Teoria da Probabilidade Moderna.

- **Blaise Pascal (1623-1662)**: Desenvolveu uma solução distinta para o Problema dos Pontos e a publicou na *De Alea Geometria*, "Geometria do Acaso". Para isso, utilizou os resultados da correspondência que mantinha com Fermat, baseando-se no

[2]Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?

"Triângulo de Pascal", que hoje recebe o seu nome, apesar de não tenha sido por ele descoberto.

- **Christiaan Huygens (1629-1695)**: Escreveu a primeira obra impressa sobre o cálculo de probabilidades, *De Ratiocinis in Ludo Alea*, motivado pela correspondência com Fermat e Pascal. O livro aborda resoluções do problema dos pontos, apresenta uma coleção de problemas de dados e retiradas de bolas de uma urna. Baseado em dados estatísticos, desenvolveu a curva de mortalidade, definindo as noções de expectativa de vida e probabilidade de sobrevida, fundamentais para as Ciências Atuariais.

- **Jakob Bernoulli (1654-1705)**: Iniciou o processo de sistematização da TP, dissociando-a dos jogos de azar e seguros apenas, associando sua aplicação ao Direito por exemplo. Após sua morte, teve sua obra *Ars Conjectandi* publicada iniciando a visão probabilística frequentista e enunciando a "Lei dos Grandes Números", conhecida hoje como Teorema de Bernoulli, um dos pilares da TP.

- **Abraham de Moivre (1667-1754)**: Publicou a obra *The Doctrine of Chance* que apresentava muitos problemas com dados e outros jogos, e a definição de "independência". Investigou ainda taxas de mortalidade e os fundamentos da Teoria das anuidades.

- **Thomas Bayes (1701-1761)**: Em seu trabalho *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, apresentou um caso especial de probabilidade na qual uma nova evidência altera a probabilidade de ocorrência de um evento. O Teorema de Bayes é atualmente muito utilizado no cálculo de probabilidades condicionais.

- **Pierre Laplace (1749-1827)**: Em suas obras, discutia sobre os conceitos e princípios da TP e suas aplicações nos jogos, na filosofia, nas ciências, nas decisões judiciais e na mortalidade. Foi a partir do trabalho de Laplace que os estudos na área aumentaram e despertaram o interesse dos mais relevantes matemáticos contemporâneos, tais como Friedrich Gauss (1777-1855), Andreyevich Markov (1856-1922), entre outros.

- **Andrei Kolmogorov (1903-1987)**: Formulou e apresentou de modo axiomático a primeira Teoria da Probabilidade fundamentada na Teoria dos Conjuntos.

1.2 Conceituação

A formalização e a formatação utilizadas para se estudar fenômenos aleatórios, variam dependendo da complexidade dos eventos estudados. Diferentes autores se utilizam de variadas notações e conceitos, porém todos modelos apresentam elementos básicos comuns. Serão apresentadas a seguir alguns destes elementos, suas definições, propriedades e exemplos. Tais conceitos foram baseados, principalmente, nos trabalhos de Albuquerque *et al.* [7], Dante e Viana [8], Morgado *et al.* [9] e Ross [2].

A palavra probabilidade é derivada do latim *probabilitas* que significa qualidade do que se pode comprovar; de *probabilis* que quer dizer o que pode passar por um teste, provável; e de *probare* que remete a ideia de provar, testar, examinar. O dicionário Michaelis [10] define probabilidade como "perspectiva positiva de que alguma coisa aconteça ou seja factível; chance, possibilidade". De maneira usual, a palavra provável é utilizada para eventos indefinidos, sendo muitas das vezes associada às palavras "sorte", "azar", "dúvida", "arriscado".

A Teoria da Probabilidade é definida por Lima e Magalhães [11] como sendo um ramo da Matemática que modela e estuda fenômenos e experimentos aleatórios, aqueles nos quais o acaso é o fator decisivo.

Inicialmente então, se faz necessário a compreensão do termo "acaso". Viali [3] o caracteriza como sendo um conjunto de fatores indeterminados e incontroláveis que influenciam na ocorrência de diferentes resultados em uma determinada experiência ou acontecimento. Por exemplo, no lançamento de uma moeda sabe-se que os possíveis resultados são "cara" ou "coroa". Contudo, antes do lançamento não é possível determinar com exatidão qual dos resultados ocorrerá devido justamente ao acaso. O conceito de acaso é relativamente tão antigo quanto às primeiras civilizações, porém sua assimilação e entendimento como sendo um fenômeno natural é recente. Anteriormente o acaso era compreendido como uma obra sobrenatural, fruto de uma intervenção divina. Ainda hoje, a aleatoriedade de alguns fenômenos é atribuída a crenças religiosas ou particulares do indivíduo, e não são aceitas naturalmente.

Dessa maneira, um experimento ou fenômeno pode ser caracterizado como:

- **Determinístico:** quando produz resultados iguais, se repetido em condições particularmente similares.

- **Aleatório:** quando produz resultados distintos, se repetido em condições particularmente similares.

Por exemplo, sabe-se que a água, sob condições normais de pressão, quando aquecida até 100ºC, entra em ebulição. Tal evento é um fenômeno determinístico. Já nos casos a seguir, os experimentos são aleatórios, como no lançamento de um dado, no resultado de um jogo de bingo ou no sorteio dos números da loteria.

Na sequência serão definidos alguns elementos importantes relativos a experimentos aleatórios.

1.2.1 Espaço Amostral e Eventos

Considerando um experimento aleatório qualquer, embora o seu resultado não seja conhecido previamente, suponha que todas as possibilidades de resultados sejam possíveis de se determinar. Este conjunto de todos os resultados possíveis de um determinado experimento aleatório é chamado de espaço amostral e será representado pela letra S, sendo que em algumas bibliografias é utilizada a letra grega Ω . Qualquer um dos subconjuntos do espaço amostral é chamado de evento, e normalmente é simbolizado por uma letra maiúscula que represente o evento em questão.

Exemplo 1.2.1: Possibilidades de respostas para uma questão do ENEM, antes de resolvê-la.

Neste exemplo, o conjunto de possibilidades de resposta para uma questão do ENEM é dado por $S = \{A, B, C, D, E\}$, no qual as letras representam as cinco opções de respostas possíveis. Já o evento $R = \{B\}$, corresponde a situação em que o candidato respondeu optando pela alternativa B.

Exemplo 1.2.2: Possíveis números mostrados na face superior de um dado cúbico.

O espaço amostral neste caso é representado por $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, no qual os números se referem a qual face do dado voltada para cima, pode ser observada. Portanto, se $P = \{2, 4, 6\}$ e $I = \{1, 3, 5\}$, então P é o evento em que a face voltada para cima apresenta um número par e I é o evento em que a face voltada para cima exibe um número ímpar.

Exemplo 1.2.3: Expectativas de resultados no lançamento de duas moedas.

Os resultados esperados ao se lançar duas moedas, são expressos pelo par ordenado

(M_1, M_2), no qual M_1 representa a primeira moeda e M_2 a segunda. Assim sendo, todas as possibilidades são

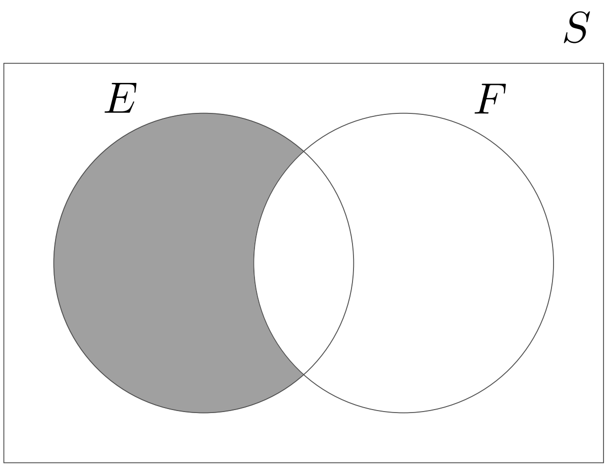
$$S = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\},$$

com C significando que a face da moeda voltada para cima é "coroa", e K que a face mostrada é "cara". Desse modo, se $A = \{(C, C)\}$, então A é o evento em que ambas moedas exibem a face coroa, e $B = \{(C, K), (K, C), (C, C)\}$, representa a situação em que pelo menos uma coroa aparece.

1.2.2 Diagrama de Venn

Para ilustrar as relações lógicas entre dois ou mais eventos, é muito utilizado o chamado Diagrama de Venn como representação gráfica. Todos os resultados delimitados no interior dos respectivos círculos correspondem aos eventos (E, F, G, ...), enquanto que o espaço amostral S é representado por um retângulo que contém todos os círculos em seu interior. Eventos específicos podem ser evidenciados ao se destacar determinadas regiões do diagrama. A Figura 1.2 ilustra na região sombreada os resultados que pertencem ao evento E mas não ao F.

Figura 1.2: Exemplo de Diagrama de Venn.



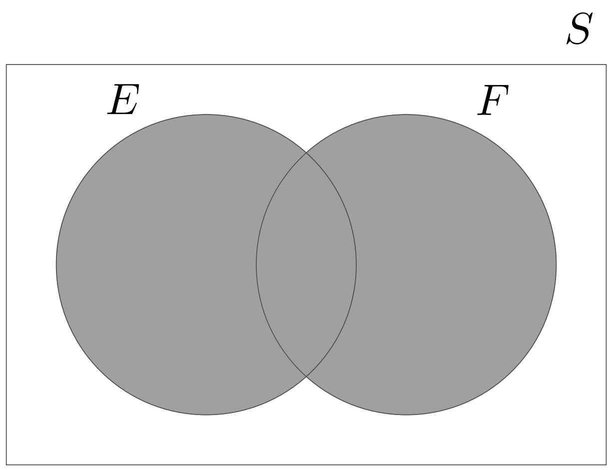
Fonte: Autoria própria.

1.2.3 Relações entre Eventos

União e Interseção de Eventos

Sejam dois eventos quaisquer E e F de um espaço amostral S. Define-se o evento $E \cup F$ como sendo a união dos eventos E e F, ou seja, todos os resultados que pertencem ao E ou F. Isto é, o evento $E \cup F$ ocorre se, e somente se, pelo menos um dos dois eventos, E ou F, ocorrem. Observe que na Figura 1.3 está destacada toda a região pertencente ao E ou ao F.

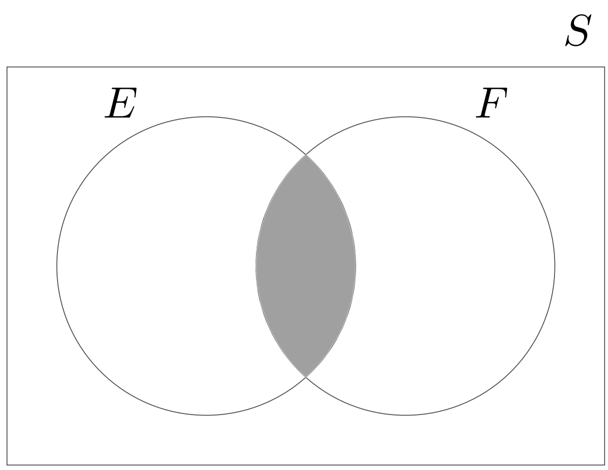
Figura 1.3: $E \cup F$.



Fonte: Autoria própria.

De maneira semelhante, fica estabelecido que o evento $E \cap F$, denominado de interseção de E e F, é o conjunto formado por todos os resultados que estão em E e em F, simultaneamente. Isto é, $E \cap F$ ocorre apenas se E e F ocorrem. Note que na Figura 1.4 está evidenciada a área que pertence, ao mesmo tempo, a ambos os eventos.

Figura 1.4: $E \cap F$.



Fonte: Autoria própria.

No Exemplo 1.2.3, se $A = \{(C, C)\}$ e $B = \{(C, K), (K, C), (C, C)\}$, então

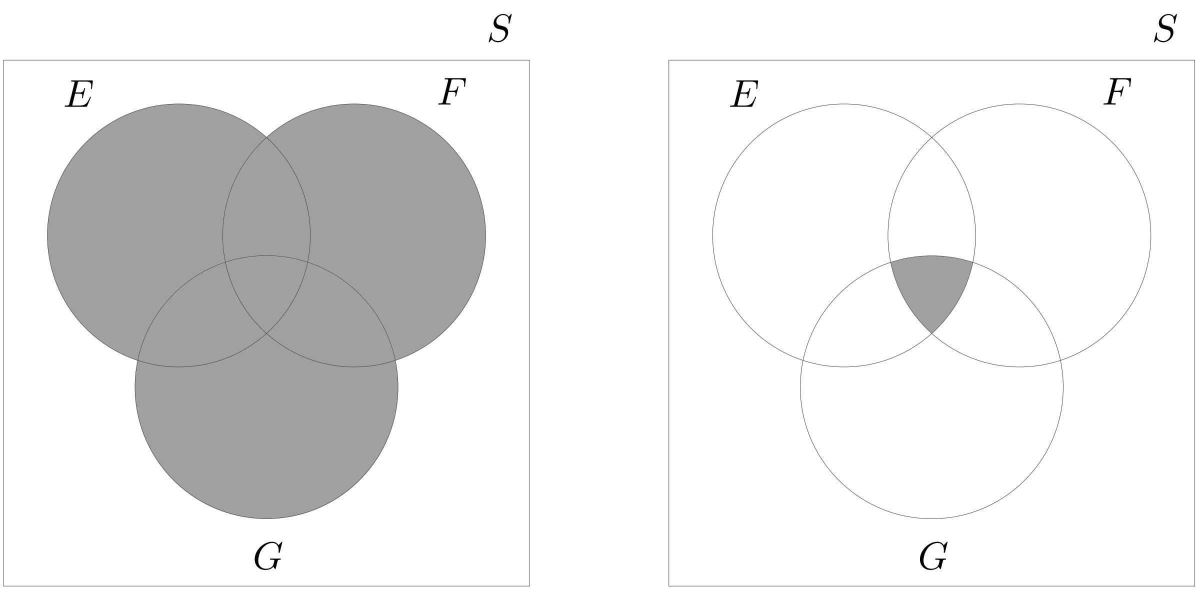
- $A \cup B = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$, o que corresponde ao próprio evento B.
- $A \cap B = \{(C, C)\}$, o que representa o próprio evento A.

No Exemplo 1.2.2, temos que o evento $P \cap I$ não contém nenhum resultado, uma vez que o número obtido no lançamento de um dado é par ou ímpar. Portanto, tal evento não pode ocorrer, sendo nomeado evento vazio e representado pelo símbolo $\varnothing$. Como $P \cap I = \varnothing$, os eventos P e I são denominados mutuamente exclusivos ou disjuntos. De maneira similar, pelo fato de $P \cup I = S$, os eventos P e I são definidos também como coletivamente exaustivos.

Analogamente, a união e a interseção de mais de dois eventos também podem ser definidas. Sejam os eventos $E_1, E_2, \dots, E_i$, com $i = (1, 2, \dots, n)$, a união de n eventos, representada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, é o evento formado por todos os resultados que apareçam nos n eventos, vide Figura 1.5 (a). De maneira semelhante, define-se a interseção dos eventos E_n, como sendo o evento composto pelos resultados que apareçam simultaneamente em todos os eventos E_n, $n = (1, 2, \dots)$, sendo representada por $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, retratada na Figura 1.5 (b).

Figura 1.5: União e Interseção entre mais de dois eventos.

(a) $E \cup F \cup G$. (b) $E \cap F \cap G$.

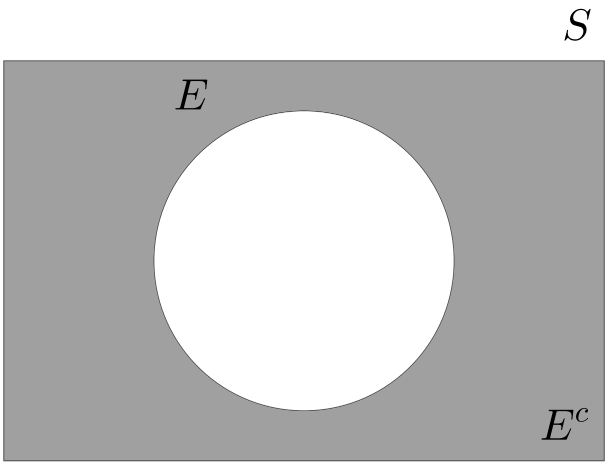


Fonte: Autoria própria.

Complemento de um Evento

O complemento de um evento é definido para todo evento E, denotado por E^c. O complemento de E é o conjunto formado por todos os resultados do espaço amostral não contidos em E. Logo, E^c ocorre se, e somente se, E não ocorrer. Verifique que na Figura 1.6 está sombreada todo o espaço amostral, excetuando o evento E.

Figura 1.6: E^c representado por toda área em cinza.



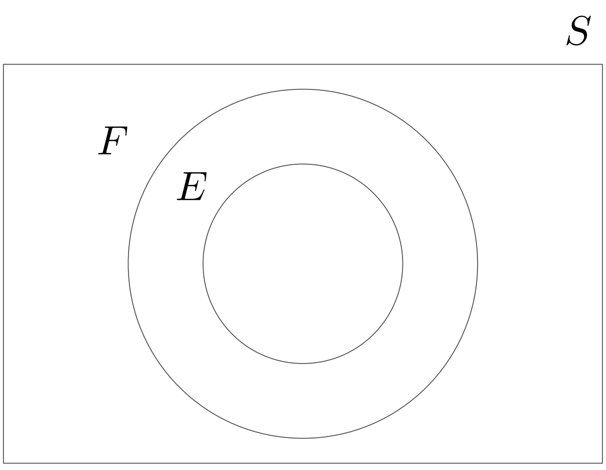
Fonte: Autoria própria.

No Exemplo 1.2.1, o complementar de R é representado por $R^c = \{A, C, D, E\}$, ou seja, na avaliação do estudante, R^c apresenta as alternativas que ele julga estarem erradas. Já no Exemplo 1.2.2, temos que $P^c = \{1, 3, 5\} = I$ e $I^c = \{2, 4, 6\} = P$. Note que $P \cup I = S$, então $(P \cup I)^c = S^c = \varnothing$.

Relação de Inclusão

Sejam quaisquer dois eventos E e F, se todos os possíveis resultados presentes em E, estiverem também em F, é dito que E é um subconjunto de F. Desta maneira, tem-se que E está contido em F, representado por $E \subset F$. De modo equivalente, F contém E, sendo simbolizado por $F \supset E$. Se $E \subset F$ e $F \subset E$, então E e F são iguais. Examinando a Figura 1.7, observa-se que qualquer resultado que pertença ao evento E, necessariamente pertence também ao evento F.

Figura 1.7: $E \subset F$.



Fonte: Autoria própria.

Retomando o Exemplo 1.2.3, se $A = \{(C, C)\}$ e $B = \{(C, K), (K, C), (C, C)\}$, então $A \subset B$, ou ainda, $B \supset A$.

Algumas Propriedades

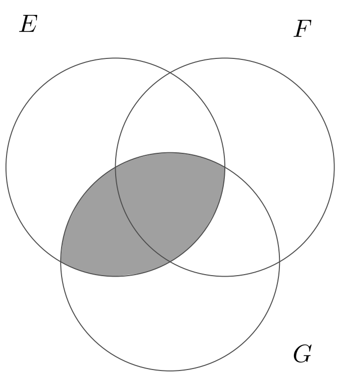
Temos que as operações de união, interseção e complementos de eventos, obedecem a determinadas propriedades de modo semelhante à álgebra.

- Comutatividade: $E \cup F = F \cup E$ e $E \cap F = F \cap E$.
- Associatividade: $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ e $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$.
- Distributividade: $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ e $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$.

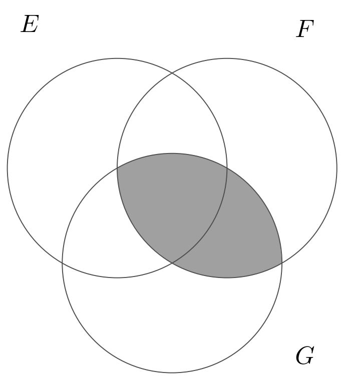
Para se verificar a veracidade de tais relações basta mostrar que o resultado contido no evento no membro do lado esquerdo da igualdade é equivalente ao que consta no membro do lado direito. Uma maneira de se comprovar tais propriedades é por meio do diagrama de Venn. A distributividade é verificada na Figura 1.8, por exemplo.

Figura 1.8: (E $\cap G) \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap G$.

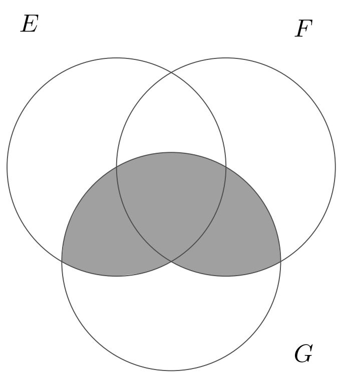
(a) Região sombreada: E $\cap\, G$.



(b) Região sombreada: F $\cap\, G$.



(c) Região sombreada: (E$\cup F)\cap G$.



Fonte: Autoria própria

1.2.4 Axiomas da Probabilidade

A probabilidade de um evento ocorrer pode ser definida em função da sua frequência relativa em uma repetição sucessiva de experimentos aleatórios. Suponha um experimento aleatório, para todo evento E do espaço amostral S, tem-se que $n(E)$ representa o número de vezes que E acontece nas n primeiras repetições do experimento. Logo, a probabilidade de ocorrência de E, é definida como:

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$$

ou seja, $P(E)$ é definida como sendo a proporção de tempo em que E ocorre, também denominada de frequência limite de E. A definição de probabilidade através da frequência relativa se baseia na suposição que $\frac{n(E)}{n}$ converge para um limite constante, ou seja é um axioma do sistema. Porém, supor necessariamente que $\frac{n(E)}{n}$ converge para um valor constante, não é uma tarefa simples. Embora realmente espera-se que a frequência limite aconteça, antes se faz necessário supor um conjunto de axiomas mais simples e autoevidentes para se provar então a existência de tal frequência limite constante. Será apresentada a abordagem axiomática moderna da Probabilidade proposta por Kolmogorov, adotada por Ross [2]. Em particular assume-se que para todo evento E no espaço amostral S, exite um valor $P(E)$, denominado probabilidade do evento E. Suponha que todas as probabilidades satisfaçam um conjunto de axiomas, intuitivos de probabilidade:

Axioma 1.1:

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Axioma 1.2:

$$P(S) = 1.$$

Axioma 1.3: Sejam os eventos $E_1, E_2, \dots,$ para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos, os quais $E_i \cap E_j = \varnothing$ quando $i \neq j$, então

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

O Axioma 1.1 estabelece que a probabilidade de ocorrência do evento E é igual a algum número compreendido entre 0 e 1. Já o Axioma 1.2 afirma que, se um evento é igual ao espaço amostral, sua probabilidade de ocorrência é igual 1, logo o evento é dito como evento certo. Por fim, o Axioma 1.3 determina que em qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de ocorrência da união entre eles é exatamente a soma de suas respectivas probabilidades.

Considerando ainda a sequência de eventos $E_1, E_2, \ldots$, na qual $E_1 = S$ e $E_i = \varnothing$ para $i > 1$, como os eventos são mutuamente exclusivos e $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, pelo Axioma 1.3

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing)$$

implicando em

$$P(\varnothing) = 0.$$

O evento vazio tem então probabilidade nula. Daí, para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos $E_1, E_2, \ldots, E_n$,

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i). \tag{1.1}$$

A Equação 1.1 pode ser obtida do Axioma 1.3 juntamente com a definição de E_i como evento vazio para os valores $i > n$. Quando o espaço amostral é um número finito temos então que o Axioma 1.3 é equivalente à Equação 1.1.

Exemplo 1.2.4: Considere uma atividade escolar do tipo verdadeiro ou falso, ou seja, em cada sentença o aluno deve indicar com a letra V, se ela for verdadeira e com F, se ela for falsa. Por razões claras a proposição não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa, logo os eventos V e F são mutuamente exclusivos. A princípio, podemos supor que a probabilidade da sentença ser verdadeira, antes do aluno a examinar, é igual a probabilidade dela ser falsa, logo temos que

$$P(V) = P(F) = \frac{1}{2}.$$

Analisando agora uma questão de múltipla escolha com 5 alternativas. O enunciado instrui o estudante a assinalar a opção incorreta, dentre cinco afirmações. Escolhendo-se aleatoriamente uma das alternativas, a probabilidade de que ela seja incorreta é $P(I) = \dfrac{1}{5}$, enquanto que a de ser correta é $P(C) = \frac{4}{5}$. Assim sendo, a chance de acerto é de $\frac{1}{5} = 20\%$, lembrando, a escolha feita ao acaso.

Exemplo 1.2.5: Seja o experimento analisado, a retirada de uma carta qualquer de um baralho de 52 cartas, sem revelá-la. As possíveis cartas são: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A, dos 4 naipes distintos (copas, ouros, espadas e paus), sendo os dois primeiros vermelhos e os outros dois, pretos. A probabilidade dela ser da cor vermelha é $P(V) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$, que é igual a de ser da cor preta $P(P) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$. Já a probabilidade de ser uma letra é dada por $P(L) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$, ao passo que a de ser um número é $P(N) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$.

Observe que as probabilidades encontradas nos Exemplos 1.2.4 e 1.2.5, vão de encontro aos Axiomas 1.1, 1.2 e 1.3:

Exemplo 1.2.4:

$$P(V \cup F) = P(V) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = P(S).$$

$$P(C \cup I) = P(C) + P(I) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 = P(S).$$

Exemplo 1.2.5:

$$P(V \cup P) = P(V) + P(P) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = P(S).$$

$$P(L \cup N) = P(L) + P(N) = \frac{16}{52} + \frac{36}{52} = 1 = P(S).$$

A abordagem matemática moderna da Teoria da Probabilidade é baseada na suposição da existência de uma função conjunto P, definida para os eventos de um espaço amostral S, satisfazendo os Axiomas 1.1, 1.2 e 1.3. Os axiomas são naturais e estão de acordo com o conceito intuitivo de probabilidade, relacionado ao acaso e à aleatoriedade. Considera-se P definida para todos os eventos de S, mas na realidade quando o espaço amostral é infinito, P define apenas uma classe de eventos ditos mensuráveis. Serão apresentadas algumas proposições simples envolvendo os conceitos previamente estabelecidos.

Proposição 1.4:

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Demonstração: Primeiramente, note que, como E e E^c são mutuamente exclusivos e como $E \cup E^c = S$, pelos Axiomas 1.2 e 1.3,

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

o que é equivalente à Proposição 1.4. Traduzindo em palavras, significa que a probabilidade de que um evento não ocorra é igual ao total de possibilidades menos a probabilidade que ele ocorra. Por exemplo, no lançamento de um dado de seis faces, a probabilidade de sair um número menor que 3, isto é 1 ou 2, é dada por $P(m) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Portanto, a probabilidade de sair um número maior ou igual a 3 é $P(M) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Proposição 1.5:

$$\text{Se } E \subset F, \text{ então } P(E) \leq P(F).$$

Demonstração: Observe que F pode ser expresso da seguinte forma (retorne na Figura 1.7 para melhor visualizar, caso necessário):

$$F = E \cup (E^c \cap F). \tag{1.2}$$

Como E e $E^c \cap F$ são mutuamente exclusivos, pelo Axioma 1.3,

$$P(F) = P(E) + P(E^c \cap F).$$

Portanto, fica provado o resultado, uma vez que $P(E^c \cap F) \geq 0$ devido a $E \subset F$. Tal proposição pode ser ilustrada por exemplo, pelo fato da probabilidade de sair uma carta de ouros no baralho ser menor do que a de sair uma carta vermelha.

Proposição 1.6:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Demonstração: Inicialmente, note que $E \cup F$ pode ser reescrito ao se substituir F, como na Equação 1.2, por

$$P(E \cup F) = P[E \cup (E^c \cap F)] = P(E) + P(E^c \cap F),$$

logo

$$P(E^c \cap F) = P(E \cup F) - P(E). \tag{1.3}$$

Ademais, sendo $F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$, novamente invocando o Axioma 1.3,

$$P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$$

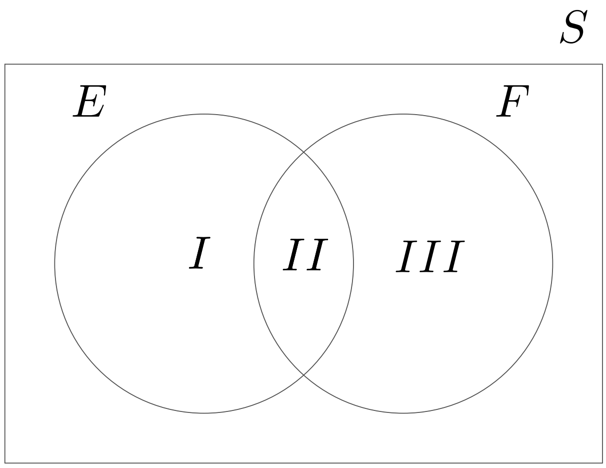
ou sua equivalência,

$$P(E^c \cap F) = P(F) - P(E \cap F). \tag{1.4}$$

Comparando as Equações 1.3 e 1.4, o resultado segue.

Outra maneira de se demonstrar a Proposição 1.6 seria por meio do diagrama da Figura 1.9, no qual $E \cup F$ foi divido em três áreas mutuamente exclusivas. Assim sendo, os resultados ficaram assim divididos: a área I simboliza aqueles que estão em E, porém não estão em F, ou seja, $E \cap F^c$; a área II retrata os que estão ao mesmo tempo em E e em F, ou melhor, $E \cap F$; e por fim, a área III representa os quais estão em F e que não pertencem a E, isto é, $E^c \cap F$. Pela Figura 1.9, observa-se

Figura 1.9: Diagrama de Venn subdividido em áreas.



Fonte: Autoria própria.

$$E \cup F = I \cup II \cup III,$$

$$E = I \cup II,$$

$$F = II \cup III.$$

Sendo I, II e III, áreas mutuamente exclusivas, pelo Axioma 1.3,

$$P(E \cup F) = P(I) + P(II) + P(III)$$

$$P(E) = P(I) + P(II)$$

$$P(F) = P(II) + P(III),$$

portanto

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(II).$$

Substituindo $P(II) = P(E \cap F)$, fica então provada a Proposição 1.6.

Exemplo 1.2.6: A probabilidade de se escolher aleatoriamente um aluno, durante a aula de Educação Física, que goste de futebol é de $\frac{4}{5}$, enquanto que a chance de gostar de vôlei é de $\frac{1}{2}$. Sabendo que a chance de se escolher alguém que goste das duas modalidades é de 40%, qual a probabilidade de que o aluno escolhido não goste de nenhum dos dois esportes?

Solução: Sejam F e V, os eventos no qual o aluno gosta de futebol e vôlei, respectivamente. A probabilidade deste aluno gostar de pelo menos uma das modalidades é dada, segundo a Proposição 1.6, por

$$P(F \cup V) = P(F) + P(V) - P(F \cap V) = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{40}{100} = 0,8 + 0,5 - 0,4 = 0,9.$$

Como o evento em que o aluno escolhido gosta de pelo menos um dos dois esportes é complementar à ele não gostar de nenhum dos dois, pela Proposição 1.4 obtém-se

$$P(F^c \cap V^c) = P[(F \cup V)^c] = 1 - P(F \cup V) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

1.2.5 Espaços Amostrais com Resultados Equiprováveis

Em vários experimentos, naturalmente se espera que todos os resultados possíveis de acontecer sejam equiprováveis, isto é, tenham a mesma possibilidade de ocorrerem. Seja um evento cujo espaço amostral S é formado por um conjunto finito de elementos, por exemplo, $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Assim sendo, é natural supor que

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(N). \tag{1.5}$$

Pelo Axioma 1.3, tem-se

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(N) = P(S). \tag{1.6}$$

Substituindo o Axioma 1.2 e a Equação 1.5, em 1.6, segue que

$$P(N) + P(N) + \cdots + P(N) = 1$$

$$N.P(N) = 1$$

$$P(N) = \frac{1}{N}.$$

Assim sendo, para cada evento E

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados em } E}{\text{número de resultados em } S}.$$

Isto significa que, supondo que todos os resultados de um experimento sejam equiprováveis, então a probabilidade de qualquer evento E é igual a razão entre os resultados de S contidos em E, pelo total de resultados de S.

Exemplo 1.2.7: Numa sala com 30 alunos, qual a probabilidade do professor chamar aleatoriamente um aluno específico para responder uma pergunta?

Solução: Como o professor irá escolher ao acaso qualquer um dentre os trinta estudantes possíveis, todos possuem a mesma chance de serem chamados. Portanto, a probabilidade é de $\frac{1}{30}$.

Exemplo 1.2.8: Nesta mesma turma existem 3 alunos com o nome de Pedro. Qual a probabilidade do aluno escolhido se chamar Pedro?

Solução: No Exemplo 1.2.7, foi encontrado que a probabilidade de cada um dos alunos ser chamado é de $\frac{1}{30}$. Assim sendo, a chance de um aluno com nome Pedro ser o escolhido é dado por $\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 10\%$.

1.2.6 Eventos Independentes

Outro conceito de suma importância para a TP é da independência entre eventos. Dois eventos E e F são ditos independentes se

$$P(E \cap F) = P(E).P(F). \tag{1.7}$$

Exemplo 1.2.9: No lançamento de duas moedas os 4 resultados possíveis, {(C,C), (C,K), (K,C), (K,K)}, são equiprováveis. Seja P o evento em que a primeira moeda saiu "cara" e S o evento em que a segunda moeda saiu "coroa", os eventos P e S são independentes?

Solução: Observe que $P = \{(K,C),(K,K)\}$, $S = \{(C,K),(C,C)\}$ e $P \cap S = \{(K,C)\}$. Assim sendo,

$$P(P) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ P(S) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ e } P(P \cap S) = \frac{1}{4}.$$

Para que P e S sejam independentes, pela Equação 1.7,

$$P(P \cap S) = P(P).P(S).$$

Substituindo os valores, tem-se que

$$P(P \cap S) = P(P).P(S) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, os eventos P e S são independentes.

1.2.7 Probabilidade Condicional

Um dos conceitos mais importantes da TP é a chamada Probabilidade Condicional. Sejam E e F dois eventos, temos que $P(F|E)$ representa a probabilidade de que F ocorra com a condição de que E tenha ocorrido. Nessa situação, E torna-se o novo ou reduzido, espaço amostral. Uma fórmula geral para $P(F|E)$ pode ser definida da seguinte maneira

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}. \tag{1.8}$$

Note que $P(F|E)$ só esta definida quando $P(E)>0$. A Equação 1.8 pode ser reescrita também como

$$P(F \cap E) = P(E).P(F|E). \tag{1.9}$$

Proposição 1.7: Seja E tal que $P(E)>0$. Então

a) $P(\varnothing|E) = 0$.

b) $P(S|E) = 1$.

c) $0 \leq P(F|E) \leq 1$.

Demonstração:

a) $P(\varnothing|E) = \dfrac{P(\varnothing \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(\varnothing)}{P(E)} = \dfrac{0}{P(E)} = 0$.

b) $P(S|E) = \dfrac{P(S \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E)}{P(E)} = 1$.

c) Como $0 \leq P(E \cap F) \leq P(E)$, dividindo todos os termos por $P(E)$, tem-se que

$$\frac{0}{P(E)} \leq \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \leq \frac{P(E)}{P(E)}$$

$$0 \leq \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \leq 1. \tag{1.10}$$

Substituindo a Equação 1.8 em 1.10, completa-se a demonstração de

$$0 \leq P(F|E) \leq 1.$$

1.2.8 Teorema da Probabilidade Total

Um importante resultado, conhecido como Teorema da Probabilidade Total, será apresentado para facilitar a compreensão do Teorema de Bayes que virá na sequência. Primeiramente, será introduzido o conceito de partição do espaço amostral S.

Um conjunto de eventos $\{F_i\}$, com $i = 1, \ldots, m$; representa uma partição do espaço amostral S se

$$F_i \cap F_j = \varnothing, \forall i, j = 1, \ldots, m \ (i \neq j)$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{m} F_i = S. \tag{1.11}$$

Assim sendo, os eventos que formam uma partição são mutuamente exclusivos, uma vez que não possuem resultados comuns, e também são coletivamente exaustivos, uma vez que a união de todos os resultados é o próprio espaço amostral. O conceito de partição pode ser aplicável a qualquer evento contido em S. A seguinte propriedade é conhecida como Teorema da Probabilidade Total.

Considere um evento E e uma partição do espaço amostral $\{F_j\}, j = 1, \ldots, m$. Tem-se então

$$P(E) = \sum_{j=1}^{m} P(E \cap F_j) \tag{1.12}$$

que pela definição de probabilidade condicional equivale a

$$P(E) = \sum_{j=1}^{m} P(E|F_j).P(F_j). \tag{1.13}$$

Demonstração: Inicialmente considere

$$E = E \cap S = E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} F_j \right).$$

Pela distributividade da interseção com relação à união, tem-se

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} (E \cap F_j). \tag{1.14}$$

Observe ainda que

$$(E \cap F_j) \cap (E \cap F_k) = \varnothing; \text{ com } j, k = \{1, \ldots, m\}, \text{ sendo } j \neq k$$

uma vez que F_j é uma partição, então $F_j \cap F_k = \varnothing$. Portanto, a partir da Equação 1.14, como todos os termos são mutuamente exclusivos, é obtido o resultado de 1.12, e por conseguinte, completa-se a demonstração.

1.2.9 Teorema de Bayes

Considere uma partição $\{F_j\}$, com $j = \{1, \ldots, m\}$ do espaço amostral com $P(F_j)>0$ para todo j. Seja E um evento no qual $P(E)>0$, pela definição de probabilidade condicional, apresentada na Subseção 1.2.7, tem-se

$$P(F_j|E) = \frac{P(F_j \cap E)}{P(E)} \quad \text{e} \quad P(E|F_j) = \frac{P(F_j \cap E)}{P(F_j)}. \tag{1.15}$$

Substituindo a Equação 1.9 em 1.15

$$P(F_j|E) = \frac{P(F_j).P(E|F_j)}{P(E)}. \tag{1.16}$$

Trazendo a Equação 1.13 para 1.16, obtem-se o chamado Teorema de Bayes

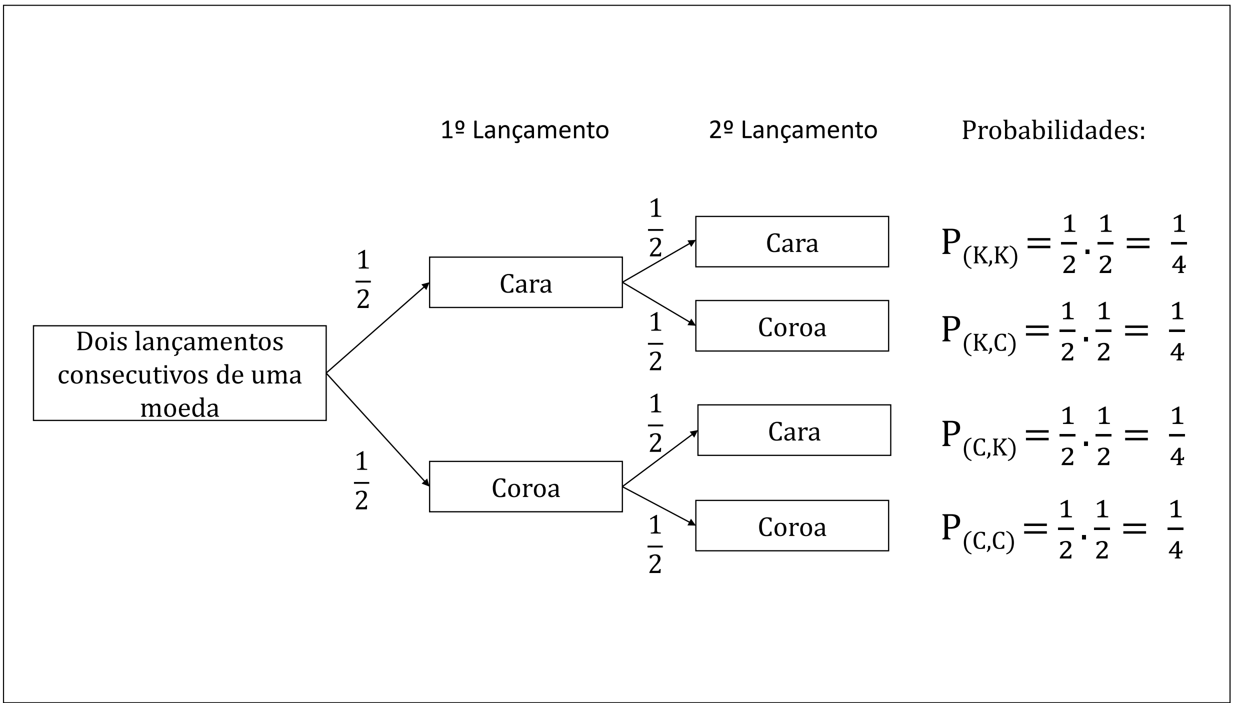
$$P(F_j|E) = \frac{P(F_j).P(E|F_j)}{\sum_{k=1}^{m} P(F_k).P(E|F_k)}.$$

As probabilidades $P(F_j)$ e $P(F_j|E)$ são chamadas *a priori* e *a posteriori*, respectivamente. O Teorema de Bayes relaciona a probabilidade *a posteriori* em termos das probabilidades condicionais e *a priori*.

1.2.10 Árvore de Probabilidades

Um recurso muito utilizado no estudo da TP é conhecido como árvore de probabilidades. Tal artifício diagramático é empregado para representar as possibilidades de ocorrência de um evento de maneira visual, simples e organizada. Pode ser adotado para ilustrar eventos dependentes ou independentes. A Figura 1.10 traz a árvore de possibilidades no lançamento de uma moeda por duas vezes consecutivas.

Figura 1.10: Exemplo de Árvore de Probabilidades.

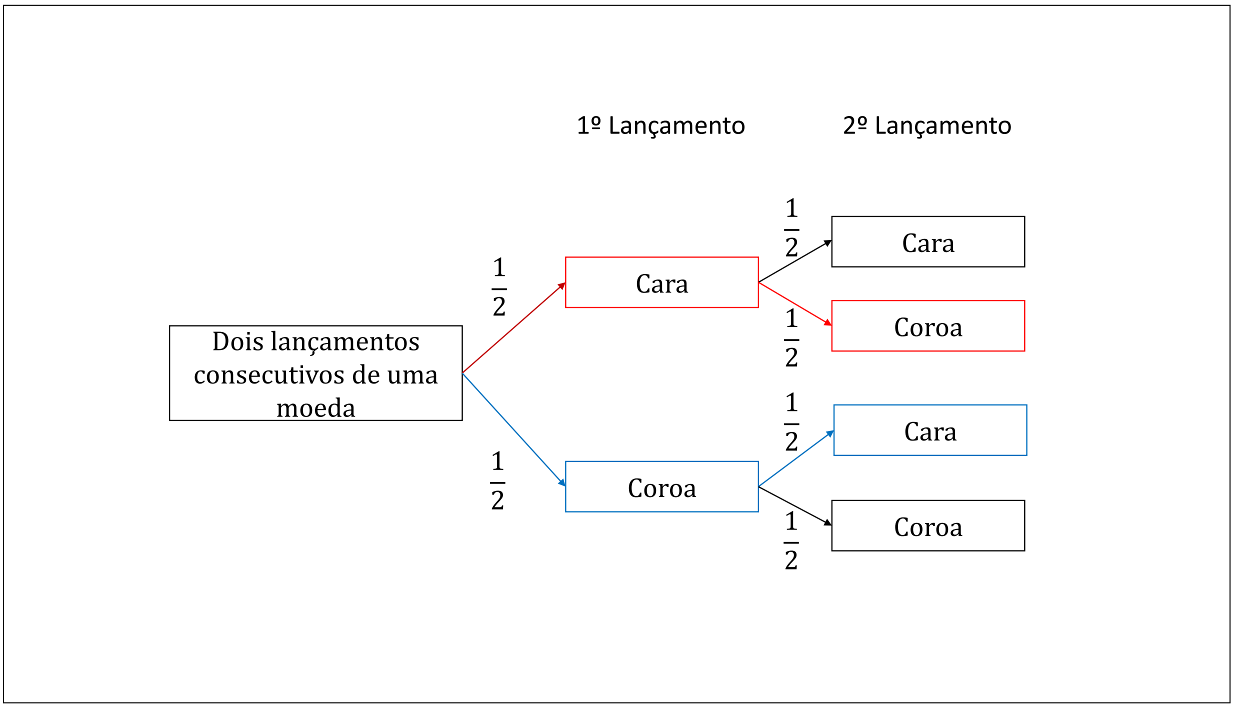


Fonte: Autoria própria.

As probabilidades calculadas foram obtidas baseadas nos próximos conceitos.

O primeiro deles é a ideia de nó, representada pelos retângulos na Figura 1.10. A probabilidade relacionada a cada um dos nós é indicada pelos valores próximos às setas que os antecedem, excetuando o primeiro que representa o espaço amostral. Tais valores correspondem à ocorrência de um evento condicionado ao acontecimento de todos os outros nós que o precedem, no caminho longitudinal contínuo correspondente. Dessa forma, cada trilha representa um resultado possível, sendo denominado de ramo desta árvore de possibilidades. Observe que na Figura 1.11, o ramo de cor vermelha indica que o no primeiro lançamento o resultado foi cara e no segundo, coroa. Já o ramo azul, ilustra o resultado {(C,K)}.

Figura 1.11: Exemplo de ramos.



Fonte: Autoria própria.

Assim sendo, para o cálculo geral de probabilidades:

- ao longo dos ramos devem ser multiplicadas, uma vez que os eventos são independentes.
- em colunas devem ser somadas, pois indicam união de eventos disjuntos.
- para cada conjunto de ramos que saem de um nó, a soma das probabilidades deve ser 1, já que designam eventos complementares.

Referências

1 LAPLACE, P. S. *A Philosophical Essay on Probabilities*. New York, USA: John Wiley Sons, 1902. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=8TJY-H6G2SYC>. Acesso em: 12/08/2021.

2 ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010. 608 p. ISBN 9788577806218. Disponível em: <https://www.meulivro.biz-/bioestatistica/2192/probabilidade-um-curso-moderno-com-aplicacoes-8-ed-pdf/>. Acesso em: 12/08/2021.

3 VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 8, p. 85–97, 2008. Disponível em: <https://www-.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177>. Acesso em: 12/08/2021.

4 HALD, A. *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New Jersey: John Wiley Sons, 2003. 611 p. ISBN 0-471-47129-1. Disponível em: <https://www.mdthinducollege.org/ebooks/statistics-/A_History_of_Probability_and_Statistics.pdf>. Acesso em: 12/08/2021.

5 SILVA, W. N. *Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns casos curiosos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém-PA, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufopa.edu.br/jspui/bitstream/123456789/298-/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o_UmResumoSobre.pdf>. Acesso em: 12/08/2021.

6 PAULO, F. F. *Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para seu ensino*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede-/7536?locale=pt_BR>. Acesso em: 06/04/2022.

7 ALBUQUERQUE, J. P. A.; FORTES, J. M. P.; FINAMORE, W. A. *Probabilidades, variáveis aleatórias e processos estocásticos*. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: Interciência - PUC Rio, 2018. 344 p. ISBN 978-85-8006-227-4. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual-.com.br/Acervo/Publicacao/176620>. Acesso em: 06/04/2022.

8 DANTE, L. R.; VIANA, F. *Análise Combinatória, Probabilidade e Computação*. 1. ed. São Paulo-SP: Ática, 2020. 272 p. ISBN 978-65-5767-045-3. Disponível em: <https://saber.com.br/obras/PNLD/PNLD_2021_OBJETIVO_2/Obra-9bdb7ba6-2459-477e-b6a9-20d0c1e49f0c/9bdb7ba6-2459-477e-b6a9-20d0c1e49f0c.pdf>. Acesso em: 06/04/2022.

9 MORGADO, A. C. O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/msg/5fpwf84eez8c0.pdf>. Acesso em: 06/04/2022.

10 MICHAELIS, H.; VASCONCELOS, C. M. *Michaelis Dicionário Escolar Língua Portuguesa*. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2016. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br>. Acesso em: 18/03/2021.

11 LIMA, A. C. P.; MAGALHãES, M. N. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 6. ed. São Paulo-SP: EDUSP, 2005. Disponível em: <https://www.academia.edu/19263364/Livro_Nocoes_de_Probabilidade_e_Estatistica_Magalhaes_parte_1>. Acesso em: 06/04/2022.