1. Función cuadrática

Definición. Una función cuadrática se representa como $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \in (\mathbb{R} - \{0\})$ y $b, c \in \mathbb{R}$. Esta función se denomina cuadrática o de segundo grado ya que el exponente mayor de la variable independiente es 2.

Gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. La gráfica de esta función corresponde a una curva llamada parábola, en la que se distinguen el vértice y el eje de simetría. El eje de simetría es una recta que pasa por el vértice de la parábola y es paralela al eje de las ordenadas (eje Y).

Concavidad de la parábola. Se llamará concavidad de la parábola a la abertura de las ramas de esta, y esta dependerá del signo del coeficiente a, dándose dos casos:

Caso 1. Si $a \in (0, +\infty)$, la concavidad de la parábola está orientada "hacia arriba".

Caso 2. Si $a \in (-\infty, 0)$, la concavidad de la parábola está orientada "hacia abajo".

2. Ceros de la función cuadrática

Definición. Se llaman ceros de la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, a los valores x_1 y x_2 para los cuales $f(x)$ es igual a 0.

En la gráfica de una función cuadrática los ceros de la función corresponden a aquellos valores en los cuales la parábola intersecta al eje de las abscisas (eje X). Los pares ordenados que representan los ceros de la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, son $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

Análisis de la gráfica según los ceros de la función cuadrática. Dada $f(x) = ax^2 + bx + c$ se plantea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde según el valor del discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) se dan los siguientes casos:

** Para $\Delta > 0$ (existen dos ceros distintos de la función), la parábola asociada a la función cuadrática intersecta al eje X en dos puntos.*

** $\Delta = 0$ (existen dos ceros iguales de la función), la parábola asociada a la función cuadrática intersecta al eje X en un único punto.*

** $\Delta < 0$ (no existen ceros reales de la función), la parábola asociada a la función cuadrática no intersecta al eje X.*

La parábola y su intersección con el eje Y. La gráfica de una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, siempre intersectará en un punto al eje de las ordenadas (eje Y). Este punto de intersección lo representaremos por el par ordenado $(0, c)$, con $c \in \mathbb{R}$.

3. Máximo y mínimo de funciones cuadráticas.

Dilatación y contracción. En la gráfica de la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, se distinguen los siguientes casos según el valor del coeficiente a.

* Si $|a| < 1$ la gráfica de la función f "se abre" con respecto a la gráfica de la función $g(x) = x^2$. Es decir, hay dilatación con respecto a x^2.

* Si $|a| > 1$ la gráfica de la función f "se cierra" con respecto a la gráfica de la función $g(x) = x^2$. Es decir, hay contracción con respecto a x^2.

Vértice y eje de simetría de la parábola. Dada la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, el vértice de la parábola está dado por el punto de intersección de esta con el eje de simetría. El vértice se denotará por $V(h, k)$, donde h corresponde al valor de la abscisa y k al valor de la ordenada de tal punto, y tiene por coordenadas:

$$V(h,k) = V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

La ecuación del eje de simetría está dado por:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Valor máximo y mínimo. Dada la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuyo vértice es $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ se tiene que para $x = -\frac{b}{2a}$:

* $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ es valor mínimo de f, si $a > 0$.

* $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ es valor máximo de f, si $a < 0$.

Crecimiento y decrecimiento. El crecimiento y decrecimiento de una función cuadrática se estudia mediante intervalos de números reales, donde el eje de simetría indica el cambio de creciente a decreciente, o viceversa. Es decir:

* Si la gráfica de la función cuadrática tiene concavidad orientada "hacia arriba", entonces el eje de simetría indica un cambio de decreciente a creciente.

* Si la gráfica de la función cuadrática tiene concavidad orientada "hacia abajo", entonces el eje de simetría indica un cambio de creciente a decreciente.