Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 15 - propiedades de vectores

1. a) ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$? Justifica la respuesta.

b) Determina todos los vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{matrix}\right\}$.

a) El producto escalar de dos vectores se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman entre sí.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

Si el producto escalar es igual a $8 \rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=8$

Si $|\vec{u}|=2$ y $|\vec{v}|=3 \rightarrow 2\cdot3\cdot\cos\alpha=8 \rightarrow \cos\alpha=\frac{4}{3}>1$

Este resultado no es posible, ya que el función coseno está acotada superiormente por 1 . Por lo tanto, no pueden existir dos vectores con las condiciones del enunciado.

b) Si $\vec{u}=(a,0,b)$ tiene módulo 8 → $\sqrt{a^2+b^2}=8$.

Si además $\vec{u}=(a,0,b)$ debe ser perpendicular a la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{matrix}\right\}$ significa que el producto escalar de $\vec{u}$ con el vector director de la recta debe anularse (por formar entre sí 90º).

Pasamos la recta a paramétricas para obtener su vector director.

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x+y=-\lambda \\ x-y=-\lambda+2 \end{matrix}\right\}$$ → Sumamos ambas ecuaciones

$$2x=-2\lambda+2 \rightarrow x=1-\lambda \rightarrow y=-\lambda-(1-\lambda) \rightarrow y=-1$$

La recta en paramétricas resulta → $r:\left\{\begin{matrix} x=1-\lambda \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}_r=(-1,0,1)$

Hacemos el producto escalar e igualamos a cero.

$\vec{u}\cdot\vec{u}_r=0 \;\rightarrow\; -a+b=0 \;\rightarrow\; a=b$

Llevamos este resultado a la primera condición obtenida $\sqrt{a^2+b^2}=8$ y despejamos.

$\sqrt{a^2+a^2}=8 \;\rightarrow\; \sqrt{2a^2}=8 \;\rightarrow\; 2a^2=64 \;\rightarrow\; a=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}$

Los vectores solución son $\vec{u}=(4\sqrt{2},0,4\sqrt{2})$ y $\vec{u}=(-4\sqrt{2},0,-4\sqrt{2})$