# Problemas – Tema 5

# Problemas resueltos - 15 - cambio de variable en integrales irracionales y cambio de variable genérico para integrales trigonométricas

**1. Resuelve** $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Proponemos el cambio de variable $x=2sen(t) \rightarrow dx=2\cos(t)dt$

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{4-4\,sen^2(t)}}2\cos(t)dt=\int \frac{1}{\sqrt{4(1-sen^2(t))}}2\cos(t)dt=\int \frac{1}{\sqrt{4(\cos^2(x))}}2\cos(t)dt$$

$$I=\int \frac{1}{2\cos(t)}2\cos(t)dt=\int dt=t+C$$

Deshacemos el cambio de variable → $x=2sen(t) \rightarrow \frac{x}{2}=sen(t) \rightarrow arcsen(\frac{x}{2})=t$

$$I=arcsen(\frac{x}{2})+C$$

**2. Resulta** $\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx$

Cambio de variable: $tg(\frac{x}{2})=t \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

Como vimos en teoría, podemos deducir:

$$\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral.

$$I=\int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{2}{2(1+t^2)+1-t^2}dt=2\int \frac{1}{t^2+3}dt=2\int \frac{1}{3\left(1+\frac{t^2}{3}\right)}dt=\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt$$

$$I=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Deshacemos el cambio: $I=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{tg(\frac{x}{2})}{\sqrt{3}}\right)+C$