6 Primo corollario (prima versione)

COROLLARIO 6.1 (del Teorema di Talete). *Una retta parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due in parti proporzionali ai lati corrispondenti.*

Ipotesi:

1. ABC triangolo
2. D punto interno ad AB, E punto interno ad AC, tali che $DE \parallel CD$

Tesi: $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{CE}$

Dimostrazione.

1. Sia ABC un triangolo ed r una retta parallela a CD che interseca, rispettivamente, i lati AB e AC in D ed E
2. Tracciamo i segmenti DC e BE
3. Consideriamo i triangoli BDE e CDE
4. I due triangoli sono equivalenti. Siano infatti R ed S le proiezioni su r, rispettivamente, di B e C. Quindi $BR \cong CS$ perché distanze fra rette parallele. Ma questi due segmenti sono altezze relative alla base DE dei triangoli BDE e CDE che risultano avere base in comune ed altezze congruenti e sono, quindi, equivalenti, cioè

$$S(BDE) = S(CDE) \implies S(ABE) = S(ACD) \tag{8}$$

essendo l'ultima implicazione valida perché somme di aree di figure equivalenti.

5. Sia ora T la proiezione di E su AB [4] e sia U la proiezione di D su AC[5]. Il segmento ET è altezza del triangolo ADE rispetto alla base AD e altezza del triangolo ABE rispetto alla base AB, quindi:

$$S(ADE) = \frac{1}{2}AD \cdot ET \ ; \ S(ABE) = \frac{1}{2}AB \cdot ET \tag{9}$$

A sua volta, il segmento DU è altezza del triangolo ADE rispetto alla base AE e altezza del triangolo ADC rispetto alla base AC, quindi

$$S(ADE) = \frac{1}{2}AE \cdot DU \ ; \ S(ADC) = \frac{1}{2}AC \cdot DU \tag{10}$$

Ora, considerando la 8, si può considerare valida la proporzione[6]:

$$\frac{S(ADE)}{S(ABE)} = \frac{S(ADE)}{S(ACD)} \tag{11}$$

[4] o sul suo prolungamento, nel caso in cui il triangolo fosse ottusangolo

[5] vedi sopra

[6] infatti sono rapporti fra quantità uguali

Introducendo ora nella 11 le espressioni contenute nelle 9 e 10, si ha:

$$\frac{\frac{1}{2}AD \cdot ET}{\frac{1}{2}AB \cdot ET} = \frac{\frac{1}{2}AE \cdot DU}{\frac{1}{2}AC \cdot DU} \tag{12}$$

Semplificando, si ottiene la tesi

$\square$