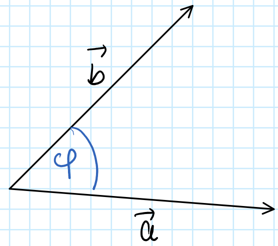
Hefteintrag Skalarprodukt

Donnerstag, 28. Januar 2021 19:11

6. Skalarprodukt von Vektoren

Definition

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so heißt die reelle Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, da das Ergebnis eine Zahl (also ein Skalar) ist.



Beispiel

Berechne das Skalarprodukt aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\varphi = 45°$.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3^2+3^2} \cdot \cos 45° = 4 \cdot \sqrt{18} \cdot \cos 45° = \underline{\underline{12}}$$

Anmerkung

Für $0° < \varphi < 90°$ gilt $\vec{a} \circ \vec{b} > 0$.

Für $90° < \varphi < 180°$ gilt $\vec{a} \circ \vec{b} < 0$.

Koordinatendarstellung des Skalarprodukts

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = \underline{\underline{12}}$$

Formel zur Berechnung des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2} \cdot \sqrt{(-7)^2+4^2}}\right) = \cos^{-1} \frac{-7+12}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{910}}\right) \approx 80{,}46°$$