WEITERBILDUNGSKOLLEG DER BUNDESSTADT BONN ARS ABENDREALSCHULE

WBK Bonn
Abendrealschule
Mathematik

Klasse: 3g

Name:______________________________

03.04.2020

Exponent und Logarithmus

Sie haben bislang nur Grundrechenarten kennen gelernt und sie kennen vermutlich eine höhere Rechenart, die des Quadrierens und Radizierens („Wurzel ziehen“).
Das Wort Quadrieren zeigt, das es sich um ein Quadrat handelt, und Sie wissen:
Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge a: A_Q= a•a = a^2
Wenn Sie nun eine quadratische Fläche haben, können Sie durch das Radizieren (‚Wurzel ziehen‘) wieder auf die Seitenlänge a zurückrechnen.
Zur Verallgemeinerung benötigen Sie die Potenzgesetze, die hier kurz wiederholt werden:
Die Darstellung von Potenzen: $Basis^{Exponent}$

Beispiel:

$$2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$$
$$2^2\cdot 2^3 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^5 = 2^{2+3} = 32$$
$$\left(2^3\right)^2 = (2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^6 = 64$$
$$also: \left(2^3\right)^2 = 2^{2\cdot 3}$$
$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2} = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3 = 8$$
$$also: \frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$$

allgemein:

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\ Faktoren}$$
$$a^n\cdot a^m = a^{n+m} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n+m\ Faktoren}$$
$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\cdot m\ Faktoren}$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n-m\ Faktoren}$$

Beachten Sie bitte, dass die Basis immer gleich ist! Somit werden bei den Potenzgesetzen die Rechenarten um eine Stufe zurückgesetzt.

Multiplikation ➔ Addition Division ➔ Subtraktion Potenzieren ➔ Multiplizieren

Überlegen Sie sich selbst, wie das Wurzelziehen jetzt aussehen muss! Lassen Sie sich von folgender Idee leiten:

$$x^2 = x\cdot x$$

$\sqrt{x^2} = x$ **da x = x_1 ist muss das Wurzelzeichen eine Zahl sein:** $\frac{1}{2}$

denn: $\sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{2\cdot\frac{1}{2}}$ **(siehe Potenzgesetze)**

also z.B. : $4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$
Um jetzt aus 64 wieder auf die 4 umzurechnen muss man die dritte Wurzel ziehen: $\sqrt[3]{64}$
oder: $64^{\frac{1}{3}}$. Da 64 dasselbe ist wie 4^3 kann man auch rechnen $(4^3)^{\frac{1}{3}}$.
Allgemein:

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a \ldots a}_{n\ Faktoren}$$
$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

WBK Bonn
Abendrealschule
Mathematik

Klasse: 3g

Name:____

Und jetzt zum Logarithmus:

für 4^3 kann man auch schreiben: exp(3*ln(4)) oder: $e^{3*\ln(4)}$
Dabei ***e*** die sogenannte ‚eulersche Zahl' mit einem Wert von ungefähr: 2,718281…
Diese Zahl ist so etwas wie die Zahl π bei der Kreisberechnung.
Wir brauchen diesen Zahlenwert zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht!
Probieren Sie das an einigen Beispielen mit Ihrem Taschenrechner aus.
Der Logarithmus von *e* ist 1, also: ln(*e*)=1
Probieren Sie auch das mit Ihrem Taschenrechner aus. $\ln(e^1)$

Dabei bedeutet *e* die eulersche Zahl und ln ist der *logarithmus naturalis* (natürlicher Logarithmus) Logarithmus (griech.: λόγος = Verständnis, αριθμός = Zahl)
Diese Zahl ist zwar real auf der Zahlenachse zu finden, aber nicht durch eine algebraische Gleichung zu berechnen, also ist sie transzendent – genau wie Pi. Der Zahlen wert ist also nur approximativ anzugeben, also durch einen Näherungswert. Geben Sie in Ihren Taschenrechner ein: exp(1), und Sie erhalten als Ergebnis 2,718281…

Somit ist der Logarithmus die Umkehrung des **Potenzierens**.

*Für den Logarithmus gilt folgende Funktionalgleichung: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
Hier wird also auch die Multiplikation um eine Rechenstufe zurückgesetzt.

Also kann man mit dem Logarithmus den Exponenten bestimmen, z.B. bei der Zinseszinsgleichung:

$$K_n = K_0(1+P)^n \quad \text{mit } P = \frac{p}{100}$$

Sind also das Startkapital, der Zinssatz sowie das Endkapital gegeben, so kann man die Laufzeit (z.B. bei Krediten) folgendermaßen berechnen:

$$K_n = K_0(1+P)^n \quad \text{teilen durch } K_0$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+P)^n = e^{n\cdot\ln(1+P)} \quad \text{logarithmieren (ln)}$$

$$\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n\cdot\ln(1+P) \quad \text{teilen durch } \ln(1+P)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+P)} = n$$

Testen Sie dies mit Ihrem Taschenrechner an dem Einstiegsbeispiel mit den 1000 € und dem Zinssatz von 3%

Was bedeutet Verdoppeln? eine Steigerung um 100%, also P = 1
Die logische Konsequenz der *Funktionalgleichung (s.0.) macht daraus:

$$\frac{ln(K_n) - ln(K_0)}{ln(2)}$$

Für die Anwendung auf die Coronakrise ist:

K_0 = Anzahl der Infizierten an früheren Tagen
K_n= Anzahl der Infizierten zum aktuellen Datum

mit n = 1, können Sie also -ausgehend vom heutigen Tag- die Verdopplungszeit ausrechnen. Das leistet dann der Verdopplungsrechner von Herrn Elschenbroich.

Noch eine ‚Kleinigkeit:

Mit dem Bruch

$$\frac{ln(K_n) - ln(K_0)}{ln(2)} = n$$

erhalten Sie einen Wert, der kleiner ist als 1. **(Am Besten: Sie rechnen das mit Ihrem Taschenrechner nach!)**
Da Sie jedoch eine Steigerung um 100% fordern, müssen sie diesen Wert auf 1 umrechnen.

Das machen Sie mit der Multiplikation mit dem Kehrwert:

$$\frac{ln(K_n) - ln(K_0)}{ln(2)} = n \qquad | \bullet \frac{ln(2)}{ln(K_n) - ln(K_0)}$$

$$1 = n \bullet \frac{ln(2)}{ln(K_n) - ln(K_0)}$$

Diese ‚Formel' verwenden Herr Elschenbroich und ich in unseren GeoGebra-Applets!

Probieren Sie das bitte auch mit Ihrem Taschenrechner aus!