Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit, d.h. in der Stichprobe treten unüberschaubar viele Merkmalwerte auf. Die Stichprobe kann klein sein (n<30). Wir wollen die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit testen.

Hypothese, Gegenhypothesen und Fragestellungen:

Wir gehen von der Nullhypothese H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ aus. Damit wird behauptet, dass die Varianz der Grundgesamtheit σ_0^2 sei.
Folgende drei Fragestellungen für die Gegenhypothese H_1 sind – entsprechend der Interessenslage des Auftraggebers – möglich:
a) Linkseinseitig: $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ (wobei diese Fragestellung statistisch weniger interessant ist)
b) Rechtseinseitig: $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
c) Beidseitig: $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Signifikanzniveau und Stichprobe:

Ein Signifikanzniveau α muss vorgegeben sein. Damit wird die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art (H_0 wird abgelehnt, obwohl i.W. zutreffend) gesteuert. Eine Stichprobe mit n (Stichprobenumfang) Stichprobenwerten x_1, x_2, … x_n wird gezogen.

Prüfgröße:

Man ermittelt das arithmetische Mittel m und damit die Stichprobenstandardabweichung s (gleichwertig zur Stichprobenvarianz s^2):

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i\_1}^{n}(x_i - m)^2 \qquad (1)$$ (*=Stichprobenvarianz[<Daten>]* in GGB)

Damit kann man nun die Prüfgröße X^2 ermitteln:

$$X^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0{}^2} \qquad (2)$$

Quantile für die Entscheidung mit dem Ablehnungsbereich:

Entsprechend der gegebenen Fragestellung müssen nun verschiedene Quantile der X^2-Verteilung ermittelt werden, um die jeweiligen Ablehnungsbereiche zu erkennen:
a) Linksseitig: Quantil $z_\alpha = X^{2\,-1}(\alpha)$ (q_L= *InversChiQuadrat[f, α]* in GGB)
Der Ablehnungsbereich erstreckt sich von $(-\infty, q_L]$
b) Rechtsseitig: Quantil $z_{1-\alpha} = X^{2\,-1}(1-\alpha)$ (q_R = *InversChiQuadrat[f, 1-α]* in GGB)
Der Ablehnungsbereich erstreckt sind von $[q_R, \infty)$
c) Beidseitig. Quantile $z_{\alpha/2} = X^{2\,-1}(\alpha/2)$ und $z_{1-\alpha/2} = X^{2\,-1}(1-\alpha/2)$
(q_1 = *InversChiQuadrat[f, α/2]*, q_2 = *InversChiQuadrat[f,1-α/2]*)
Der Ablehnungsbereich besteht aus zwei Teilen, nämlich $(-\infty, q_1]$ und $[q_2, \infty)$

Entscheidung mit Ablehnungbereich:

Fällt die Prüfgröße z in den Ablehnungsbereich der betrachteten Fragestellung, dann ist die Nullhypothese H_0 zugunsten der betrachteten Gegenhypothese H_1 abzulehnen:
Die Zufallsstichprobe spricht bei dieser Gegenhypothese **signifikant** gegen die Nullhypothese.
Andernfalls gibt es keinen Grund zur Ablehnung der Nullhypothese:
Die Zufallsstichprobe spricht **nicht signifikant** gegen die Nullhypothese.

Berechnung der Überschreitungswahrscheinlichkeiten (Irrtumswahrscheinlichkeit):

Völlig gleichberechtigt mit den obigen Schritten zur statistischen Entscheidung ist die Methode der Überschreitungswahrscheinlichkeit. Sie unterscheidet sich nur in der Vorgehensweise von der Entscheidung mittels Ablehnungsbereichen.
Man ermittelt dazu die Überschreitungswahrscheinlichkeiten nach folgender Formel:
a) Einseitig (links- bzw. rechtsseitig): $p_1 = 1 - X^2(f,z)$ (p_1 = *1-ChiQuadrat[f,z]* in GGB)
b) Zweiseitig (beidseitig): $p_2 = 2\, min(X^2(f,z), 1 - X^2(f,z))$
(p_2 = *2 Min[Chiquadrat[f,z],1-ChiQuadrat[f,z]]* in GGB)

Entscheidung mit Überschreitungswahrscheinlichkeiten:

a) Linksseitig:
Diese Fragestellung tritt in der statistischen Praxis selten auf, weil die Varianz in den meisten Fällen nach oben hin abweicht.

b) Rechtsseitig:
Ist die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_1 kleiner als das Signifikanzniveau α, so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden.
Die Stichprobe spricht in diesem Fall **signifikant** gegen H_0.
Ist dagegen die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_1 nicht kleiner als das Signifikanzniveau α, dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von H_0.
<u>Kurz</u>:
$z > 0$ und $p_1 < \alpha$ => Ablehnung von H_0
$z \leq 0$ oder $p_1 \geq \alpha$ => Akzeptanz von H_0

c) Beidseitig:
Ist die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_2 kleiner als das Signifikanzniveau α, so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden. Die Stichprobe spricht in diesem Fall **signifikant** gegen H_0.
Ist dagegen die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_2 nicht kleiner als das Signifikanzniveau α, dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von H_0.
Kurz:
$p_2 < \alpha$ => Ablehnung von H_0
$p_2 \geq \alpha$ => Akzeptanz von H_0

Statt Überschreitungswahrscheinlichkeit spricht man auch von **Irrtumswahrscheinlichkeit**, weil man sich mit dieser Wahrscheinlich irrt, wenn man H_0 ablehnt.
Ist also diese Irrtumswahrscheinlichkeit sehr klein, dann ist das Risiko 1.Art (einen Fehler 1.Art zu begehen) eher gering.

siehe Beispiele Test-Varianz-links.ggb, Test-Varianz-rechts.ggb, Test-Varianz-beide.ggb

Test-Varianz-beide(Gesamt).ggb
In diesem Beispiel werden 1000 Zufallszahlen als Grundgesamtheit erzeugt. Daraus wird nun eine Stichprobe von n (<100) zufällig entnommen und damit der Test nach obigen Regeln durchgeführt.