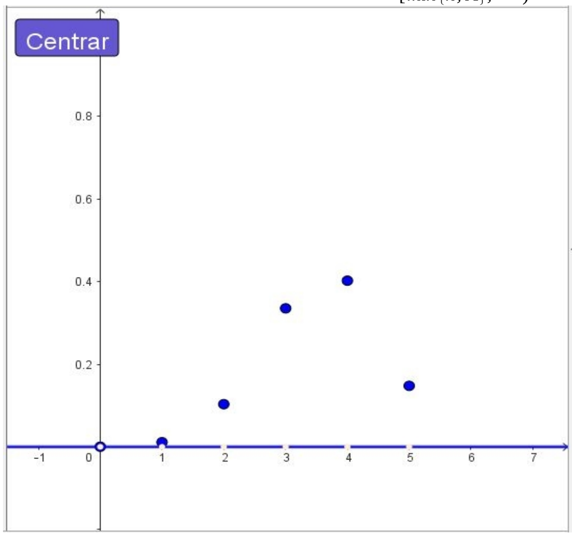
☺ Distribución Hipergeométrica. X ~ H(A,B,n).

Una v. a. X tiene distribución Hipergeométrica de parámetros $A,B,n\in\mathbb{N}$ con $n\leq A+B$.

si tiene como función de probabilidad: $f_X(x)=$ Y cuya función de distribución es: $F_X(x)=$

$$=0\cdot I_{\{\mathbb{R}-\{máx\{0,n-B\},\dots,mín\{n,A\}\}\}}(x)+ \frac{\binom{A}{x}\cdot\binom{B}{n-x}}{\binom{A+B}{n}}\cdot I_{\{máx\{0,n-B\},\dots,mín\{n,A\}\}}(x)$$

$$=0\cdot I_{(-\infty,máx\{0,n-B\})}(x)+\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{[x]}\frac{\binom{A}{i}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B}{n}}\cdot I_{[máx\{0,n-B\},mín\{n,A\})}(x)+1\cdot I_{[mín\{n,A\},+\infty)}(x)$$



Ejemplo de f(x) para A=5, B=16 y n=15.

La distribución hipergeómetrica es especialmente útil, cuando la población es pequeña y en todos aquellos casos en los que se extraigan muestras o se realizan experiencias repetidas sin devolución del elemento extraído o sin retornar a la situación experimental inicial.

Teniendo en cuenta que por ser una distribución de probabilidad la Distribución hipergeométrica, se cumple $\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}\frac{\binom{A}{i}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B}{n}}=1$, y que los números combinatorios cumplen

$$\binom{N}{x}=\frac{N}{x}\cdot\binom{N-1}{x-1} \qquad \forall N,x\in\mathbb{N}, con\ n<N \ .$$

Además

$$P(a\leq X<b)=F(b)-F(a) \ .$$

Algunos de sus parámetros o momentos destacables son:

✔ $E\{X^k\}=\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}} i^k\cdot\frac{\binom{A}{i}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B}{n}};\forall k\in\mathbb{N}-\{0\}$

Para $k=1$, Se cumple:

$$E\{X\}=\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}} i\cdot\frac{\binom{A}{i}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B}{n}}=\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}} i\cdot\frac{\frac{A}{i}\cdot\binom{A-1}{i-1}\cdot\binom{B}{n-i}}{\frac{A+B}{n}\cdot\binom{A+B-1}{n-1}}=$$

$$=\frac{n\cdot A}{A+B}\cdot\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}\frac{\binom{A}{i-1}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B-1}{n-1}}=\frac{n\cdot A}{A+B}$$

Para $k=2$, Se cumple:

$$E\{X\}=\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}} i^2\cdot\frac{\binom{A}{i}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B}{n}}=\frac{n\cdot A}{A+B}\cdot\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}(i-1+1)\cdot\frac{\binom{A-1}{i-1}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B-1}{n-1}}=$$

$$=\frac{n\cdot A}{A+B}\cdot\left(\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}(i-1)\cdot\frac{\binom{A-1}{i-1}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B-1}{n-1}}+\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}\frac{\binom{A-1}{i-1}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B-1}{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{n\cdot A}{A+B}\cdot\left(\frac{(n-1)\cdot(A-1)}{A+B-1}\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}\frac{\binom{A-2}{i-2}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B-2}{n-2}}+1\right)=\frac{n\cdot A}{A+B}\cdot\left(\frac{(n-1)\cdot(A-1)}{A+B-1}+1\right)$$

✔

$$E\left\{(X-\alpha)^k\right\}=\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}(i-E\{X\})^k\cdot f(i)=\sum_{i=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}\left(i-\frac{n\cdot A}{A+B}\right)^k\cdot\frac{\binom{A}{i}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B}{n}};\forall k\in\mathbb{N}-\{0\} \quad .$$

En particular si $k=2$, se cumple:

$$E\left\{(X-\alpha)^2\right\}=E\{X^2\}-(E\{X\})^2=\frac{n\cdot A}{A+B}\cdot\left(\frac{(n-1)\cdot(A-1)}{A+B-1}+1\right)-\left(\frac{n\cdot A}{A+B}\right)^2=$$

$$=\frac{n\cdot A}{(A+B)^2}\cdot\frac{A+B-n}{A+B-1}=\mu_2$$

✔ $$\phi(t)=E\left\{e^{X\cdot t\cdot \hat{\imath}}\right\}=\sum_{k=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}\left\{e^{k\cdot t\cdot \hat{\imath}}\right\}\cdot f(k)=\sum_{k=máx\{0,n-B\}}^{mín\{n,A\}}\left\{e^{k\cdot t\cdot \hat{\imath}}\right\}\cdot\frac{\binom{A}{k}\cdot\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}} \quad .$$