Esercizio 1. Determinare il prodotto vettroiale tra i vettori $\mathbf{v}(1,2,3)$ e $\mathbf{w}(2,2,-1)$.

Soluzione:
Calcoliamo il prodotto vettoriale tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\times\mathbf{w} &= \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix} = i\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix} - j\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix} + k\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\\ &= i(-2-6) - j(-1-6) + k(2-4) = -8i+7j-2k = (-8,7,-2)\end{aligned}$$

□

Per la proprietà sui determinanti appena dimostrata, se i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo.

Supponiamo di avere calcolato il prodotto vettoriale $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ tra due vettori e sia $\mathbf{w}$ un terzo vettore. Il prodotto scalare tra il vettore $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ può essere facilmente calcolato nel seguente modo

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \det\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$$

In particolare se $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ o se $\mathbf{w}=\mathbf{v}$ otteniamo una matrice con due righe uguali e quindi con determinante nullo, quindi

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$$

ovvero, per le proprietà del prodotto scalare, il vettore $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

Ripetiamo in quest'ottica gli esercizi 24 e 25.

Esercizio 2. Determinare un vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}(1,3,1)$ e $\mathbf{w}(2,0,-1)$.

Soluzione:
Calcoliamo il prodotto vettoriale tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix} = i(-3-0) - j(-1-2) + k(0-6) = -3i+3j-6k = (-3,3,-6)$$

Quindi il vettore $(-3,3,-6)$ e tutti i suoi multipli sono ortogonali a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

□

Esercizio 3. Determinare un vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}(1,3,1)$ e $\mathbf{w}(2,1,-1)$.

Soluzione:
Calcoliamo il prodotto vettoriale tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix} = i(-3-1) - j(-1-2) + k(1-6) = -4i+3j-5k = (-4,3,-5)$$

Quindi il vettore $(-4,3,-5)$ e tutti i suoi multipli sono ortogonali a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

□

Con l'uso del prodotto vettoriale risulta più semplice anche svolgere esercizi in cui si tratta di determinare l'equazione del piano passante pre tre punti.

Esercizio 4. Determinare l'equazione Cartesiana del piano π passante per i punti $A(1,3,1)$, $B(2,0,0)$ e $C(0,1,1)$. Il punto $P(0,2,0)$ appartiene a tale piano?

Soluzione:
I vettori

$$\mathbf{u} = B-A = (1,-3,-1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = C-A = (-1,-2,0)$$

sono paralleli al piano π.

Per ottenere la direzione ortogonale a π basta calcolare il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ che è ortogonale a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e quindi al piano π.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = i(0-2) - j(0-1) + k(-2-3) = -2i + j - 5k = (-2, 1, -5)$$

Di conseguenza il piano ha equazione del tipo $-2x + y - 5z = d$. Imponendo il passaggio per uno dei tre punti si ottiene $-4 = d$, quindi il piano cercato è

$$\pi : \ -2x + y - 5z = -4 \quad \Rightarrow \quad \pi : \ 2x - y + 5z = 4$$

Infine $P(0, 2, 0)$ appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione. Sostituendo nell'equazione Cartesiana otteniamo

$$-2 = 4 \quad \text{no}$$

Poichè le coordinate non soddisfano l'equazione, P non appartiene al piano.

$\square$