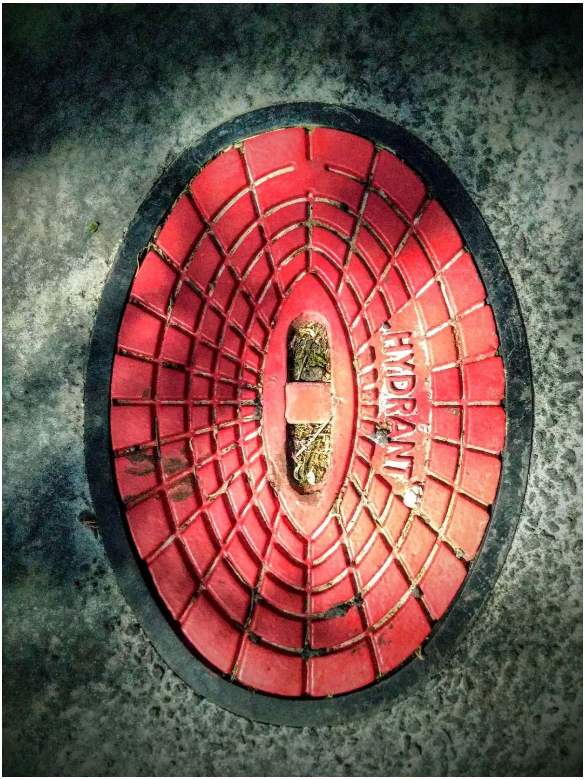
Kuželovy sečky

Tečna v bodě elipsy planimetricky

Žán Pól Kastról



7. července 2022

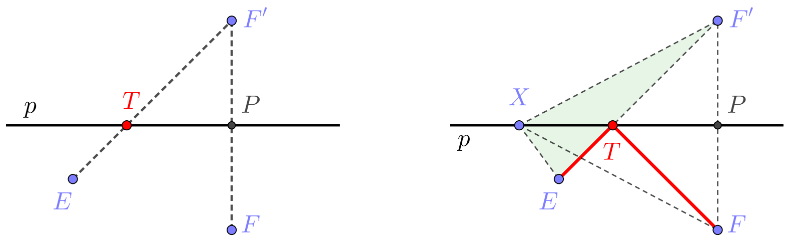
1 Závod s plácnutím o zeď

Ještě než začneme blbnout s tečnou, podívejme se na jeden esencielní příklad, který se nám bude hodit. Asi ho známe z voptiky a tak...

Příklad 1

Je dána přímka p a dva různé body $E, F \notin p$ ležící ve stejné polorovině dané přímkou p. Najdi bod $T \in p$ takový, aby vzdálenost $|ET| + |FT|$ byla minimální. (Závod z F do E, závodník musí plácnout do zdi p – kde se má dotknout?)

Pro hledaný bod T platí: $T = p \cap EF'$, kde F' je obraz bodu F v osové souměrnosti s osou p (obr.1a).



(a) Konstrukce (b) Důkaz

Obr. 1

Důkaz. Na p zvolíme libovolný bod $X \neq T$ (obr.1b). Trojúhelníkova nerovnost pro $\Delta EXF'$ říká, že $|EX| + |F'X| > |EF'|$, tedy

$$|EX| + |F'X| > |ET| + |F'T| \tag{1}$$

Osova souměrnost dle p říká, že

$$|F'X| = |FX|; \quad |F'T| = |FT| \tag{2}$$

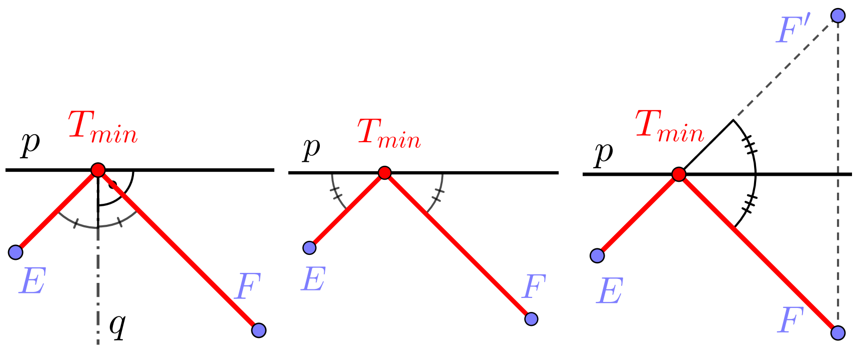
Dosadíme (2) do (1):

$$|EX| + |FX| > |ET| + |FT| \tag{3}$$

Ze všech bodů přímky p má tedy bod T nejmenší součet vzdáleností od E a F. **Minimum součtu tedy existuje a je právě jedno.** □

Poznámka 1: Pokud body E, F leží v opačných polorovinách daných přímkou p, pak je hledaným bodem T samozdřejmě průserčík p a EF.

Poznámka 2: Jak poznat na první pohled, že T odpovídá minimu? Z konstrukce bodu T (obr. 1b) plyne, že shodnost **tří dvojic úhlů** (viz obr. 2)!



(a) Kolmice q je osou $\angle ETF$

(b) p svírá s červenými úsečkami shodné úhly

(c) p je osou úhlu $\angle FTF'$

Obr. 2: Jak poznat bod T_{min}, jemuž odpovídá minimum součtu vzáleností od E a F?

2 Definice tečny elipsy

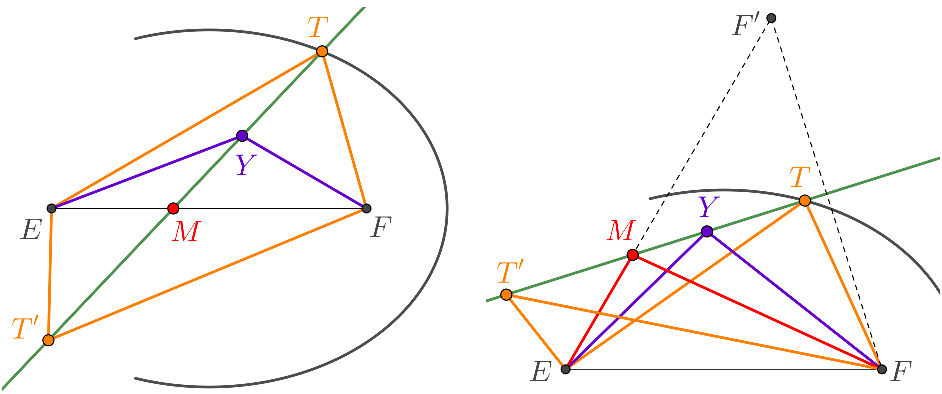
Definice 1: Tečna elipsy

Tečna *elipsy* je taková přímka, která s ní má společný **právě jeden** bod.

Věta 1: Pomocná větička o tečně elipsy

Všechny body tečny elipsy (kromě dotykového bodu) leží **vně** elipsy.

Důkaz. Tohle je príma důkaz, jenž využívá myšlenky z předchozího příkladu – čum na obrázek 3 a zmáčkni odkaz na aplet v GeoGebře. □



(a) Přímka TY protíná úsečku EF (b) Přímka TY neprotíná úsečku EF

Obr. 3:

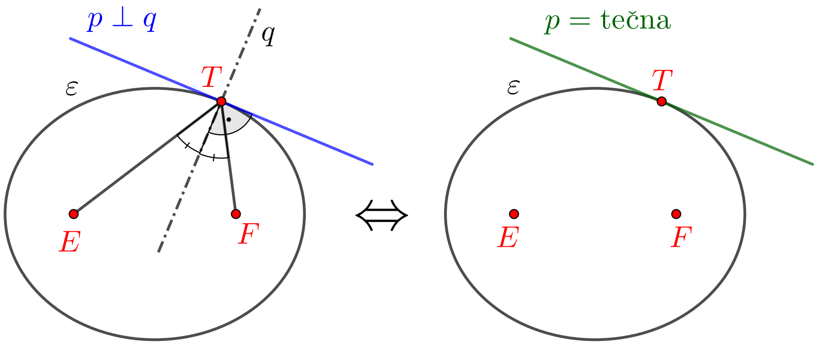
`https://www.geogebra.org/m/jeuxpq8u`

3 Věta o tečně elipsy

3.1 Formulace 1

Věta: O tečně elipsy – formulace 1

Přímka p je tečnou elipsy ε s ohnisky E, F v dotykovém bodě T, **právě když** je kolmá na osu úhlu ETF (obr.4).

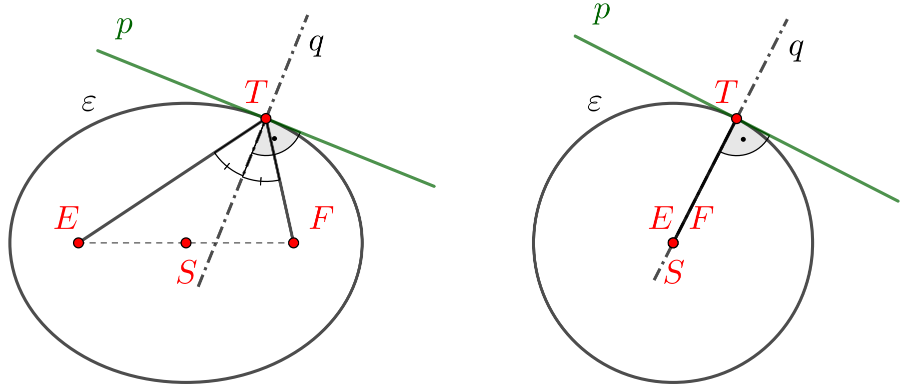


Obr. 4: „Tečna je **kolmice** na osu **vnitřního** úhlu průvodičů ($\angle ETF$)."

Tato formulace věty o tečně krástně koresponduje s větou o tečně kružnice:

Přímka p je tečnou kružnice k se středem S v dotykovém bodě T **právě když** je kolmá na poloměr ST.

Kružnice je totiž speciální případ elipsy, který dostaneme tak, že ohnisko F přesuneme do ohniska E. Průvodiče splynou a na ose jejich úhlu q leží poloměr ST. Kolmost p a q se zachová (obr.5 + odkaz na aplet 1 v GeoGebře v popisku obrázku) a tečna kružnice je tedy kolmá na poloměr ST.



(a) Tečna je kolmá na osu průvodičů q (b) Tečna je kolmá na poloměr ST

Obr. 5: Viz **Aplet 1** zde: https://www.geogebra.org/m/nkzbxzky

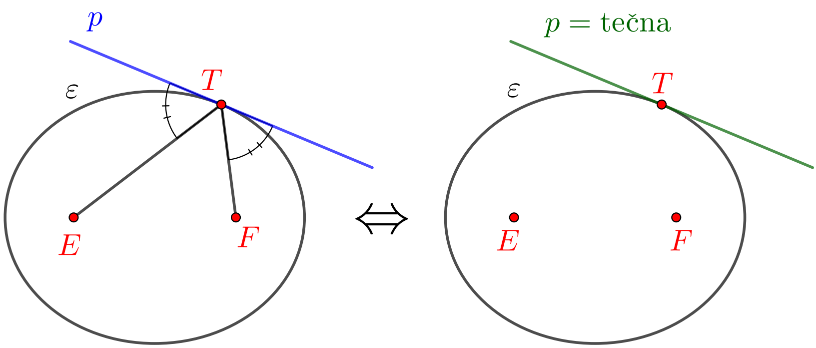
3.2 Formulace 2

Mrkneme-li se na obr.5a, vidíme, že pač $p \perp q$ a zároveň úhly mezi průvodiči (ET, FT) a q jsou shodné, musejí být shodné rovněž úhly mezi průvodiči a tečnou!

Tím dostáváme druhou formulaci věty o tečně elipsy:

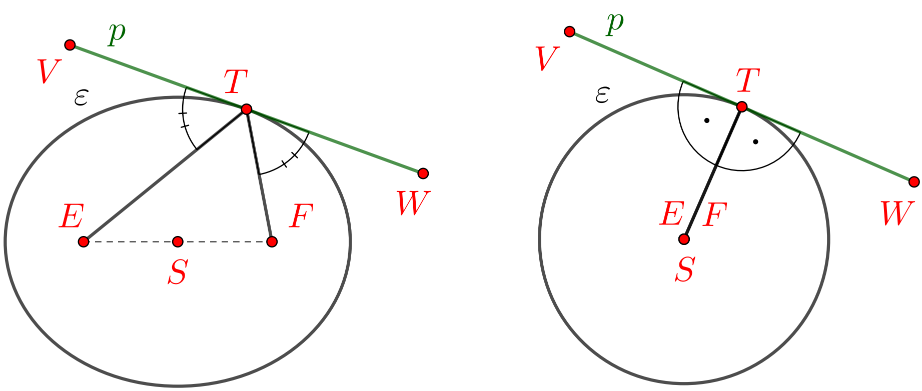
Věta: O tečně elipsy – formulace 2

Přímka p je tečnou elipsy ε s ohnisky E, F v dotykovém bodě T, **právě když** úhly, které svírá s průvodiči ET a FT se rovnají (obr.6).



Obr. 6: „Tečna **svírá** s průvodiči ET a FT stejné úhly."

Musím uznat, že tohle je moc pěkná a snadno zapamatovatelná formulace! I tato vlastnost se pochopitelně zachovává při přechodu od elipsy ke kružnici (obr.7 – plus aplet v GeoGebře).

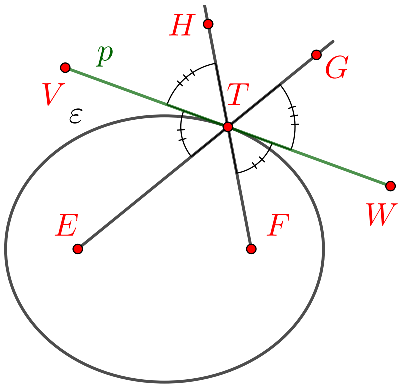


(a) $\angle VTE = \angle WTF$ (b) $\angle VTS = \angle WTS$

Obr. 7: Viz **Aplet 2** zde: https://www.geogebra.org/m/nkzbxzky

3.3 Formulace 3

Mrkneme-li se na obr.8, vidíme, že pokud trochu prodloužíme průvodiče ET a FT za bod T, potom díky vlastnosti vrcholových úhlů budou úhly označené třemi čárkami shodné jako ty, označené dvěma čárkami. Jinými slovy – tečna je osou vnějšího úhlu průvodičů:

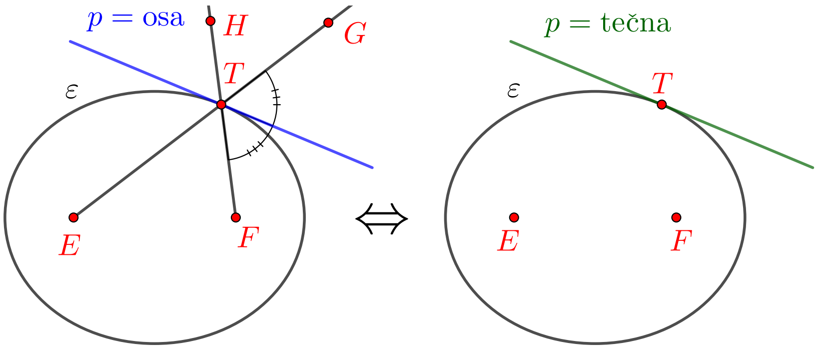


Obr. 8: Vrcholové úhly: $\angle VTE = \angle WTG$ a $\angle WTF = \angle VTH$.

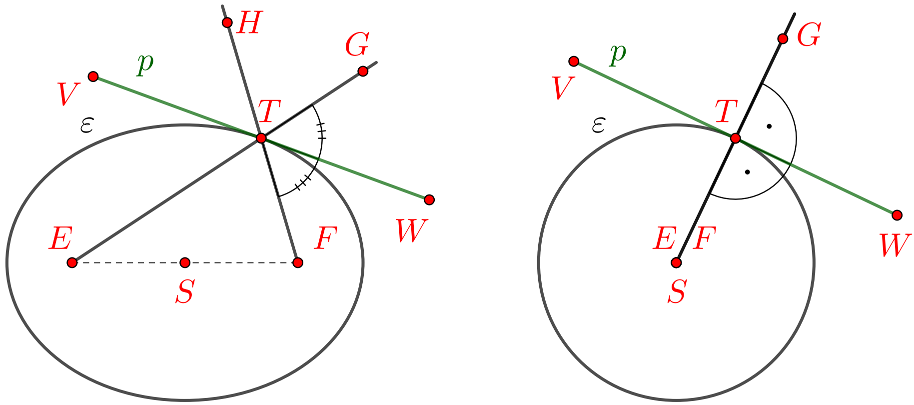
Věta: O tečně elipsy – formulace 3

Přímka p je tečnou elipsy ε s ohnisky E, F v dotykovém bodě T, **právě když** je osou vnějšího úhlu průvodičů (půlí vnější úhel průvodičů) (obr.9).

I tato vlastnost se pochopitelně zachovává při přechodu od elipsy ke kružnici (obr.10 + Aplet 3 v GeoGebře).



Obr. 9: „Tečna je **osa vnějšího** úhlu průvodičů ($\angle FTG$ resp. $\angle FTH$).“



(a) $\angle WTF = \angle WTG$

(b) $\angle WTS = \angle WTG$

Obr. 10: Viz **Aplet 3** zde: https://www.geogebra.org/m/nkzbxzky

4 Důkaz věty o tečně elipsy

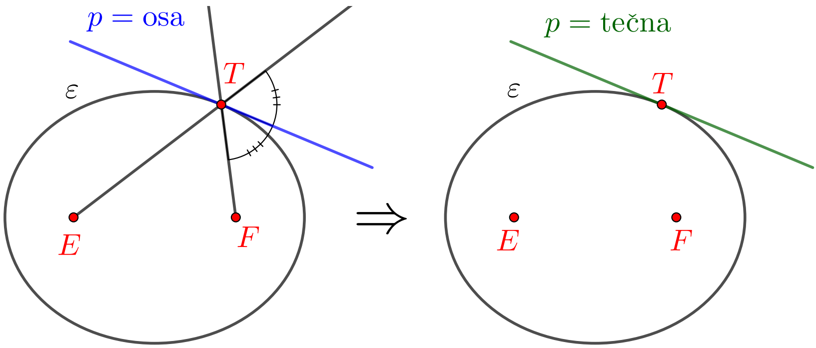
Věta má tvar ekvivalence, takže důkaz uděláme ve **dvou krocích**, kdy dokážeme postupně dvě implikace.

4.1 Důkaz Kroku 1

V důkazu Kroku 1 vyjdeme z Formulace 3:

Krok 1: p je osa vnějšího úhlu průvodičů $\Rightarrow p =$ tečna.

Jestliže přímka p prochází bodem T elipsy ε s ohnisky E, F a je *osou* vnějšího úhlu průvodičů, **potom** je to *tečna* elipsy v bodě T.



Obr. 11: Co chci dokázat v Kroku 1?

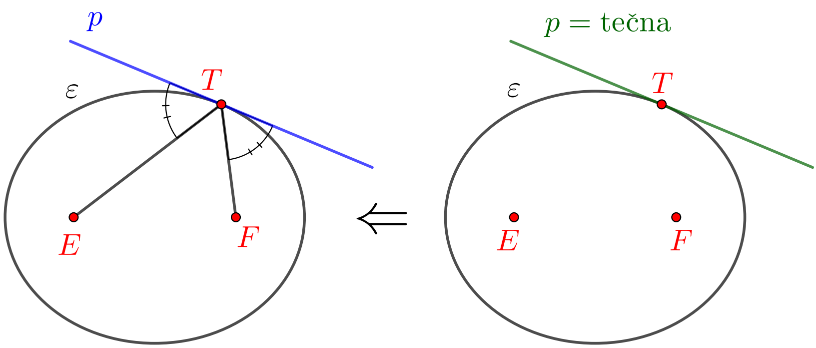
Důkaz. Máme tedy přímku p, která je osou vnějšího úhlu průvodičů (obr. 11 vlevo). Dle **Poznámky 2** k Příkladu 1 a obr. 2c vidíme, že bod T odpovídá minumu součtu vzdáleností od ohnisek E a F (dle definice elipsy je tento součet roven $2a$) a víme, že toto mimimum je jediné. Všechny ostatní body přímky p mají součet vzdáleností od ohnisek větší než $2a$, takže jsou vnějšími body elipsy. Přímka p má tedy s elipsou jediný společný bod, takže je to tečna. $\square$

4.2 Důkaz Kroku 2

V důkazu Kroku 2 vyjdeme z Formulace 2:

Krok 2: $p =$ tečna $\Rightarrow p$ svírá s průvodiči shodné úhly.

Jestliže přímka p procházející bodem T elipsy ε s ohnisky E, F, je *tečnou*, **potom** úhly, které svírá s průvodiči ET a FT se *rovnají.*



Obr. 12: Co chci dokázat v Kroku 2?

Důkaz. No ty ve, to bude snadné. Pro T platí $|ET|+|FT| = 2a$ (definice elipsy) a máme dokázáno (Věta 1), že pro všechny ostatní body tečny platí $|ET| + |FT| > 2a$. Bod T je tedy dle **Příkladu** 1 tím bodem přímky p, pro který platí, že součet $|ET| + |FT|$ je minimální. Tím pádem, dle **Poznámky 2** v tomto příkladu, platí, že úhly, které svírají úsečky ET a EF s přímkou p, jsou **shodné**. $\square$