Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 2 - composición de función con su inversa

1. Dada la función $f(x)=1+\sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Calculamos la inversa, partiendo de $y=1+\sqrt{x}$ y despejando x en función de y .

$$y-1=\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad y^2-2y+1=x$$

Realizamos un cambio de variable, intercambiando x con y .

$$x^2-2x+1=y$$

La función obtenida es la inversa.

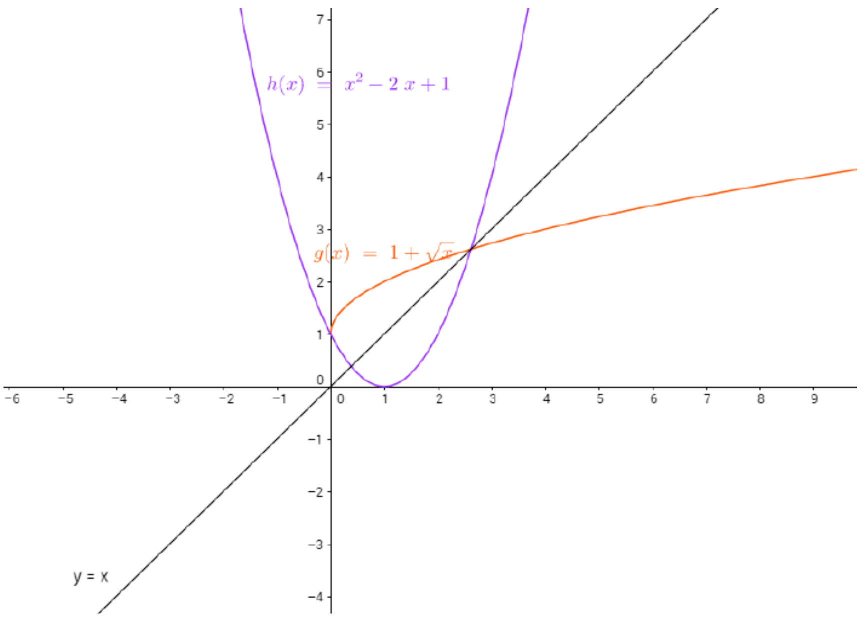
$$f^{-1}(x)=x^2-2x+1 \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x)=(x-1)^2$$

En efecto, las siguientes composiciones dan lugar a la función identidad.

$$f[f^{-1}(x)]=1+\sqrt{(x-1)^2}=1+x-1=x$$

$$f^{-1}[f(x)]=((1+\sqrt{x})-1)^2=(\sqrt{x})^2=x$$

Si representamos ambas funciones, comprobamos como las dos se reflejan mutuamente a través de la recta $y=x$, que es la bisectriz del primer cuadrante. Esta reflexión ocurre en el intervalo $x\geq 0$, ya que la función $f(x)=1+\sqrt{x}$ no está definida para valores negativos de la variable independiente.



2. a) Demostrar que la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ definida en el dominio [$1,\infty$) admite inversa.

b) Obtener la función inversa $f^{-1}(x)$ y comprobar que se cumplen las igualdades: $(f\circ f^{-1})(x)=x$ y $(f^{-1}\circ f)(x)=x$.

a) Realizamos un esbozo de la función en el dominio [$1,\infty$).

Corte al eje $OX \rightarrow x=1 \rightarrow (1,0)$

Asíntota oblicua → $m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1 \rightarrow m=1$

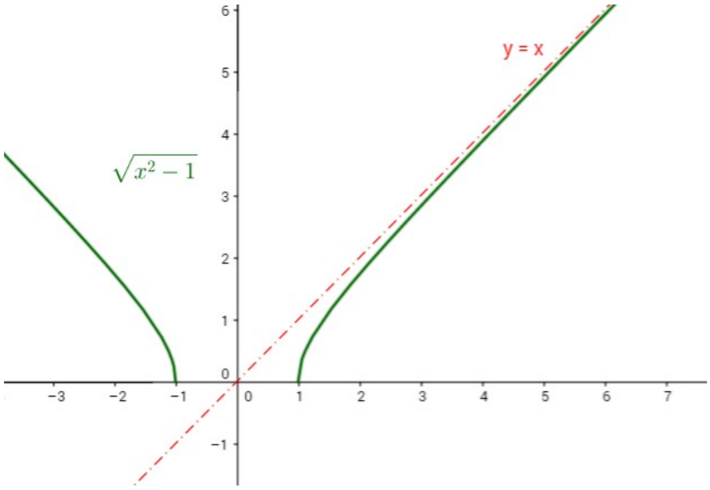
$n=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}-x=\infty-\infty$ → multiplicar y dividir por conjugado

$$\frac{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

La asíntota oblicua es → $y=x$

$$f(x)=\sqrt{x^2-1} \rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x=0\notin Dom(f)$$

Evaluamos la primera derivada en un punto cualquiera del dominio, a la derecha de $x=1$ → $f'(10)>0$ → La función es estrictamente creciente.



En el dominio [$1,\infty$) la función es inyectiva, ya que cualquier recta horizontal corta como máximo en un punto a la gráfica (valores distintos del dominio tienen asociados valores distintos de la imagen).

Para el dominio [$1,\infty$) se tiene un codominio maximal [$0,\infty$), por lo tanto la función es sobreyectiva (cualquier valor de la imagen del codominio tiene asociado al menos un punto del dominio).

Por lo tanto, la función es biyectiva y admite inversa.

b) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$y=\sqrt{x^2-1} \rightarrow y^2=x^2-1 \rightarrow y^2+1=x^2 \rightarrow \sqrt{y^2+1}=x$

$y=\sqrt{x^2+1} \rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}$

$(f \circ f^{-1})(x)=f(\sqrt{x^2+1})=\sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2+1}=\sqrt{x^2}=x$

$(f^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2-1}=\sqrt{x^2}=x$

3. Realiza la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ de las siguientes parejas de funciones.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$

b) $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$

$$(f \circ g)(x)=f\left(\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-2}}=x-2 \quad , \quad (g \circ f)(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}-2}=\frac{x}{1-2x}$$

b) $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$

$$(f \circ g)(x)=f(\sqrt{2x-4})=(\sqrt{2x-4})^2-\sqrt{2x-4}-2=2x-4-\sqrt{2x-4}-2=2x-\sqrt{2x-4}-6$$

$$(g \circ f)(x)=g(x^2-x-2)=\sqrt{2(x^2-x-2)-4}=\sqrt{2x^2-2x-8}$$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$

$$(f \circ g)(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\frac{\frac{x^2-1}{x}+3}{\frac{x^2-1}{x}-3}=\frac{x^2+3x-1}{x^2-3x-1}$$

$$(g \circ f)(x)=g\left(\frac{x+3}{x-3}\right)=\frac{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2-1}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{(x-3)^2}}{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{12x}{(x-3)(x+3)}=\frac{12x}{x^2-9}$$

4. Sea $f(x)=x^2-5x+3$ **y** $g(x)=x^2$ **. Obtén** $f[g(x)]$ **y** $g[f(x)]$ **.**

$$f[g(x)]=f[x^2]=(x^2)^2-5(x^2)+3=x^4-5x^2+3$$

$$g[f(x)]=g[x^2-5x+3]=(x^2-5x+3)^2=x^4-10x^3+31x^2-30x+9$$

5. Sea $f(x)=sen(x)$ **y** $g(x)=x^2+5$ **. Obtén** $f[g(x)]$ **,** $g[f(x)]$ **,** $f[f(x)]$ **y** $g[g(x)]$ **. Hallar el valor de estas composiciones de funciones en** $x=0$ **y en** $x=2$ **.**

Hacemos las composiciones, recordando que los valores $x=0$ y $x=2$ indican radianes al ser sustituidos dentro de la función seno (ojo con la calculadora).

$$f[g(x)]=f[x^2+5]=sen(x^2+5)$$
$$f[g(0)]=sen(5)=-0{,}95$$
$$f[g(2)]=sen(9)=0{,}41$$

$$g[f(x)]=g[sen(x)]=sen^2(x)+5$$
$$g[f(0)]=5$$
$$g[f(2)]=sen^2(2)+5=5{,}82$$

$$f[f(x)]=f[sen(x)]=sen(sen(x))$$
$$f[f(0)]=sen(sen(0))=sen(0)=0$$
$$f[f(2)]=sen(sen(2))=sen(0{,}90)=0{,}79$$

$$g[g(x)]=g[x^2+5]=(x^2+5)^2+5$$
$$g[g(0)]=25+5=30$$
$$g[g(2)]=(4+5)^2+5=86$$

6. Sea $f(x)=x^2+1$ **y** $g(x)=\frac{1}{x}$ **. Obtener las siguientes composiciones:** $(f\circ g)(2)$ **,** $(g\circ g)(x)$ **,** $(g\circ f)(-3)$ **,** $(f\circ g)(x)$ **.**

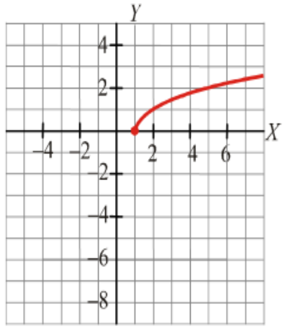
$$(f\circ g)(2)=f[g(2)]=f[\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

$$(g\circ g)(x)=g[g(x)]=g[\frac{1}{x}]=x$$

$$(g\circ f)(-3)=g[f(-3)]=g[9+1]=g[10]=\frac{1}{10}$$

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f[\frac{1}{x}]=\frac{1}{x^2}+1=\frac{1+x^2}{x^2}$$

7. Dada la gráfica de $f(x)$ obtener los valores de $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.



Dos funciones inversas $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ cumplen que la imagen de $f(x)$ es el dominio de $f^{-1}(x)$. Por lo tanto, si $f(x_0)=y_0 \rightarrow f^{-1}(y_0)=x_0$

$f^{-1}(0)$ → ¿Qué valor x_0 cumple $f(x_0)=0$? → $f(1)=0 \rightarrow x_0=1 \rightarrow f^{-1}(0)=1$

$f^{-1}(2)$ → ¿Qué valor x_0 cumple $f(x_0)=2$? → $f(5)=2 \rightarrow x_0=5 \rightarrow f^{-1}(2)=5$

8. Calcular la función inversa de $f(x)=3x$ **,** $g(x)=x+7$ **y** $h(x)=3x-2$ **y comprobar que sus respectivas composiciones dan lugar a la función identidad.**

$$f(x)=3x \quad \rightarrow \quad y=3x \quad \rightarrow \quad \frac{y}{3}=x \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x)=\frac{x}{3}$$

$$f[f^{-1}(x)]=f[\frac{x}{3}]=x \quad , \quad f^{-1}[f(x)]=f^{-1}[3x]=x$$

$$g(x)=x+7 \quad \rightarrow \quad y=x+7 \quad \rightarrow \quad y-7=x \quad \rightarrow \quad g^{-1}(x)=x-7$$

$$g[g^{-1}(x)]=g[x-7]=x \quad , \quad g^{-1}[g(x)]=g^{-1}[x+7]=x$$

$$h(x)=3x-2 \quad \rightarrow \quad y=3x-2 \quad \rightarrow \quad \frac{y+2}{3}=x \quad \rightarrow \quad h^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$$

$$h[h^{-1}(x)]=h[\frac{x+2}{3}]=x \quad , \quad h^{-1}[h(x)]=h^{-1}[3x-2]=x$$

9. Dada las funciones $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ **y** $g(x)=x^2-1$ **, calcula** $(g\circ f)(x)$ **y** $(f\circ g)(x)$

$$(g\circ f)(x) \;\rightarrow\; g[\frac{x-1}{x+1}]=(\frac{x-1}{x+1})^2-1=\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{-4x}{(x+1)^2}$$

$$(f\circ g)(x) \;\rightarrow\; f[x^2-1]=\frac{x^2-1-1}{x^2-1+1}=\frac{x^2-2}{x^2}$$

10. Halla la inversa de:

a) $f(x)=\frac{2x-1}{3}$

b) $f(x)=\frac{-x+3}{2}$

a) Despejamos la variable $x \rightarrow 3y=2x-1 \rightarrow \frac{3y+1}{2}=x$

Intercambiamos el nombre de las variables → $\frac{3x+1}{2}=y$

La función inversa resulta → $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2}$

b) Despejamos la variable $x \rightarrow 2y=-x+3 \rightarrow 3-2y=x$

Intercambiamos el nombre de las variables → $3-2x=y$

La función inversa resulta → $f^{-1}(x)=3-2x$

11. Obtener la inversa de $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ **y comprobar que** $(f\circ f^{-1})(x)=x$ **y que** $(f^{-1}\circ f)(x)=x$

$y=\dfrac{1}{x-1} \;\rightarrow\; x-1=\dfrac{1}{y} \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{y}+1 \;\rightarrow\; f^{-1}=\dfrac{1}{x}+1$ → función inversa

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left[\frac{1}{x}+1\right]=\frac{1}{\frac{1}{x}+1-1}=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}\left[\frac{1}{x-1}\right]=\frac{1}{\frac{1}{x-1}}+1=x$$