

探究2 导数研究函数的性质（单调性、极值、最值）（P100）

探究人：

时间：

指导老师：

探究目的

1. 学会利用信息技术研究问题
2. 掌握导数与函数的性质的关系

探究器材

电脑或平板、手机等设备，Geogebra 软件，实验手册

探究步骤

实验1：导数研究函数 $y=x^3-3x^2+1$ 的单调性

第一步：打开 geogebra 软件，选择绘图功能，在左侧输入框中输入函数 “ $f(x)=x^3-3x^2+1$ ”，右侧显示框将显示出函数的图像。

第二步：在左侧输入框中输入 “ $f'(x)$ ”，右侧显示框将显示出导函数的图像。

第三步：在左侧输入框中输入 “ $f'(x)<0$ ”，右侧显示框显示出导函数小于 0 的区域，观察该区域中导数与函数的关系；在左侧输入框中输入 “ $f'(x)>0$ ”，右侧显示框显示出导函数大于 0 的区域，观察该区域中导数与函数的关系。（注：选择“描点”工具，将区域边界与 x 轴交点选中，可知交点坐标，即可知区域中 x 的范围）

实验结论：通过观察可知：满足 $f'(x)<0$ 的 x 的范围为_____，是 $f(x)$ 的单调递__区间；
满足 $f'(x)>0$ 的 x 的范围为_____，是 $f(x)$ 的单调递__区间。

实验2：导数研究函数 $y=x^3-3x^2+1$ 的极值

第一步：在软件上方工具栏中找到“极值点”工具（），选择该工具后点击 $f(x)$ 的图像，软件将给出函数的极值点。

第二步：结合实验 1，观察极值点与导数的关系。

实验结论：

- 1、由图像知， $f'(0)=0$ ；当 $x<0$ 时， $f'(x)>0$ ；当 $0<x<2$ 时， $f'(x)<0$ 。 $x=0$ 是函数的极大值点，极大值为 1；
- 2、 $f'(2)=0$ ；当 $0<x<2$ 时， $f'(x)<0$ ；当 $x>2$ 时， $f'(x)>0$ 。 $x=2$ 是函数的极小值点，极大值为 1。

实验 3：导数研究函数 $y=x^3-3x^2+1$ 在某闭区间上的最值

第一步：在软件上方工具栏中找到“函数检视”工具 ()，选择该工具后点击函数图像，软件将显示函数的最值信息。

第二步：改变 x 的范围（如 $[-2,-1]$ 、 $[-1,0.5]$ 、 $[0.5,2]$ 、 $[2,3]$ 等等），观察不同范围内，函数最值的情况。

实验结论：

- 1、若函数在区间 $[a,b]$ 内单调递增 ($f'(x)>0$)，则最大值为___，最小值为___；
- 2、若函数在区间 $[a,b]$ 内单调递减 ($f'(x)<0$)，则最大值为___，最小值为___；
- 3、若函数在区间 $[a,b]$ 内先增再减 ($x\in[a,c]$, $f'(x)>0$ ； $x\in[c,b]$, $f'(x)<0$)，则最大值为___，最小值为___；
- 4、若函数在区间 $[a,b]$ 内先减再增 ($x\in[a,c]$, $f'(x)<0$ ； $x\in[c,b]$, $f'(x)>0$)，则最大值为___，最小值为___。

综上所述可知：在闭区间内连续的函数，最值一定在_____之间取得。

实验 4：按实验 1~3 的步骤方法，研究函数 $y = x - e^x$ 的性质

实验结论：

- 1、单调递增区间为_____，单调递减区间为_____；
- 2、极___值点为___，极___值为___；无极___值。
- 3、在区间 $[-4,-1]$ 的最大值为___，最小值为___；在区间 $[-2,2]$ 的最大值为___，最小值为___；在区间 $[1,3]$ 的最大值为___，最小值为___。

探究结论

通过以上实验，通过导函数，可解决函数以下性质问题：

- 1、单调性问题：若在区间 D 上， $f'(x)>0$ ，则 $f(x)$ 在区间 D 上单调递___；若在区间 D 上， $f'(x)<0$ ，则 $f(x)$ 在区间 D 上单调递___。
- 2、极值问题：
 - ①若 $f'(a)=0$ ，且在 a 附近的左边 $f'(x)<0$ ，在 a 附近的右边 $f'(x)>0$ ，则 $x=a$ 为函数的极___值点，极___值为___；
 - ②若 $f'(b)=0$ ，且在 b 附近的左边 $f'(x)>0$ ，在 b 附近的右边 $f'(x)<0$ ，则 $x=b$ 为函数的极___值点，极___值为___；

3、最值问题：在闭区间内连续的函数，最值一定在_____之间取得。

交流与反思

- 1、在开区间内连续的函数，是否一定存在最值？
- 2、试着仿造本次探究的方法，研究在学习过程当中所见到的函数的性质。

探究练习

- 1、判断下列函数的单调性：(1) $f(x)=x^2-2x+4$ (2) $f(x)=\ln x-x$
- 2、利用导数讨论二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的单调区间。
- 3、求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的单调区间、极值，并求它在闭区间 $[1/2,4]$ 内的最值。
- 4、证明不等式： $x-1 \geq \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

探究练习参考答案

- 1、(1) 增区间： $[1, +\infty)$ ，减区间 $(-\infty, 1]$ (2) 增区间： $(0, 1)$ ，减区间 $(1, +\infty)$
- 2、 $f'(x)=2ax+b$ ，当 $a>0$ 时，增区间： $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ ，减区间 $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ ；
当 $a<0$ 时，增区间： $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ ，减区间 $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 。
- 3、增区间： $(-\infty, -1]$ 、 $[1, +\infty)$ ，减区间 $[-1, 0)$ 、 $(0, 1]$ ；
极大值-2，极小值 2；
在 $[1/2,4]$ 内最小值为 2，最大值为 17/4
- 4、构造函数 $f(x)=x-1-\ln x$ ，求其最小值即可，证明略。