Nefroida – část 2

Nefroida jakožto obálka svazku křivek

Žán Pól Kastról

10. prosince 2022

1 Vo co de

V *první části* této dvoudílné série[1] o *nefroidě*[2] jsme se zabývali touto pozoruhodnou křivkou jakožto speciálním případem **epicykloidy**, která vzniká jako trajektorie bodu na obvodu kružnice, jež je odvalována po obvodu jiné kružnice.

V této *druhé části* si ukážeme další **tři způsoby**, jak vytvořit nefroidu, a to jakožto **obálku svazku křivek**[3]. Nejprve si něco řekneme o obálkách.

2 Obálka svazku křivek

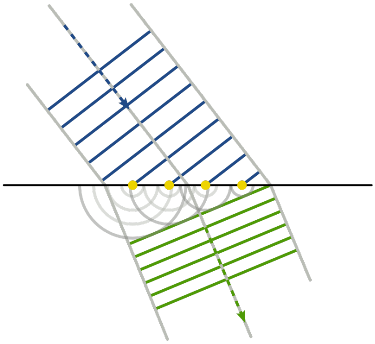
Obálka svazku rovinných křivek je křivka, která je v daném bodě tečná ke každému prvku svazku a tyto dotykové body dohromady tvoří celou obálku.

Intuitivně je to celkem jasné – každej blbec zná přece Huygensův princip[4] a jeho obálky elementárních vlnoplošek (obr. 1).

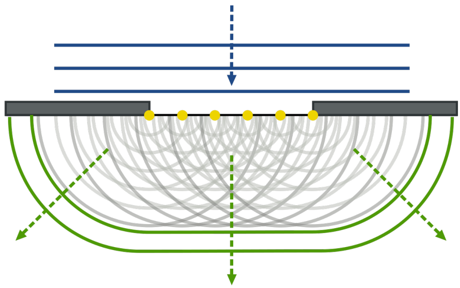
Jak se však najde rovnice takové obálky? Vokážeme si to na jednoduchém příkladě, který zná asi každej ze základky – no jak jsme spojovali na čtverečkovanym papíře body na ose y s body na ose x (např. $11 \mapsto 0; 10 \mapsto 1; 9 \mapsto 2$ atd. až $0 \mapsto 11$) a dostali jsme takovou síť, jejíž obálkou byla jistá záhadná křivka (viz obr. 2a), o níž jsme si mysleli, že je to hyperbola, ale ona je to ve skutečnosti parabola...

Čummež na obr.2b. Svazek zelených úseček (přímek) snadno popíšeme. Má-li bod úsečky na ose y souřadnici t, má koncový bod na ose x souřadnici $11 - t$. Potom pro celý svazek přímek jde parametr t od nuly do 11 a svazek má rovnici (úsekový tvar)

[1] https://www.geogebra.org/m/v3qrst6p#material/xgshaz34
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Nephroid
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Envelope_(mathematics)
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Huygens%E2%80%93Fresnel_principle

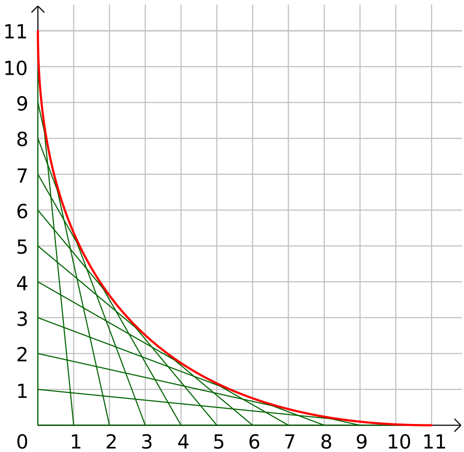


(a) popis

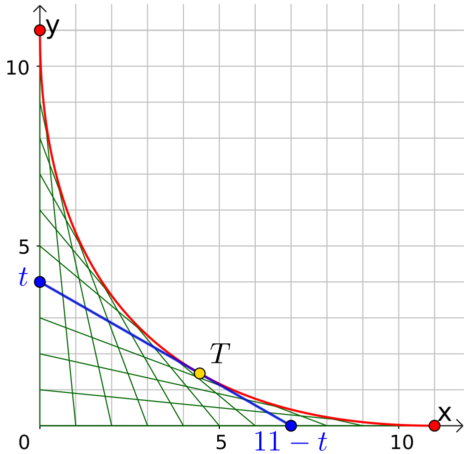


(b) popis

Obr. 1: Huygensovy obálky elementárních vlnoplošek



(a) Zábava ze základky



(b) Zábava z matfýsu

Obr. 2: Dno, duše přitisknutá na zásvětná česna.

https://www.geogebra.org/m/gjtmuejb

$$\boxed{f(x,y,t):\ \frac{x}{t}+\frac{y}{11-t}=1;\quad t\in\langle 0;11\rangle} \tag{1}$$

Každý bod T naší červené obálky má **společný bod** s jednou přímkou ze svazku zelených přímek. Proto jeho souřadnice musí splňovat rovnici (1).

Zároveň je daná zelená křivka (usečka) **tečná** k hledané červené obálce, takže bod T obálky musí splňovat rovnici

$$\boxed{f'(x,y,t)=0} \tag{2}$$

kde derivujeme podle parametru t. Bod T obálky má tedy současně splňovat rovnice (1) a (2). Jejich kombinací dostaneme rovnici hledané obálky. Tak deme na to. („Lec gou onit“ – jak říkáme u nás v Hnuslích.)

Nejprve upravíme rovnici svazku přímek (1):

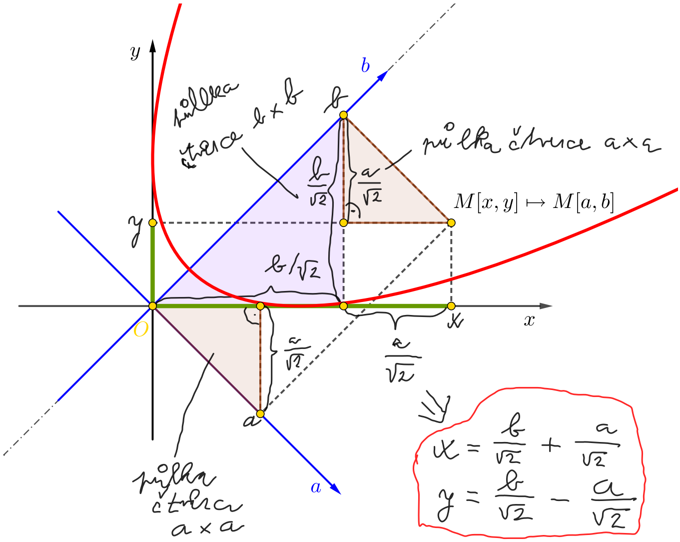
$$\begin{aligned} \frac{x}{t}+\frac{y}{11-t}&=1\\ x(11-t)+yt&=t(11-t)\\ 11x-tx+yt&=11t-t^2\\ \underline{t^2+(-x+y-11)t+11x}&=0 \end{aligned} \tag{3}$$

No a teťkonc funkci na levé straně rovnice (3) zderivujeme podle t a položíme rovnu nule:

$$\underline{2t+(-x+y-11)}=0 \tag{4}$$

Soustavu rovnic (3) a (4) můžeme přetavit do rovnice obálky buď tak, že vyloučíme parametr t, nebo naopak separujeme x a y a vyjádříme je pomocí t (to už si vyzkoušej prosim tě sama, jo).

Dostaneme tak buď implicitní vyjádření červené obálky ve tvaru



Obr. 3: Otočení SOSO o 45° to vyřeší, ty vé!

$$\underline{\underline{(x-y)^2 - 22(x+y) + 121 = 0,}} \tag{5}$$

nebo její parametrické vyjádření

$$\underline{\underline{X = \left\{ \left[\frac{t^2}{11}; \frac{t^2}{11} - 2t + 11 \right] ;\ t \in \langle 0; 11 \rangle \right\}}}$$

Vokazuje se, že obálkou je **část paraboly s osou v přímce** $y = x$. Parabola má polohu, na kterou nejsme zvyklí – její osa není rovnoběžná s žádnou ze souřadných os x, y. Proto možná v rovnici (5) parabolu nepoznáváme. Snadno ale **prokážeme**, že je to opravdu parabola – pomocí otočení souřadné soustavy.

Souřadnou soustavu Oxy otočíme kolem počátku O ve směru hodinových ručiček o úhel 45°. Dostaneme tím novou souřadnou soustavu, jejíž počátek je rovněž O a osy můžeme označit třeba a, b (viz obr. 3).

Vidíme, že vztah mezi souřadnicemi $(x; y)$ a $(a; b)$ je:

$$x = \frac{b+a}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

$$y = \frac{b-a}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

Ólrajt, prdněmež nyníť (6) a (7) do (5). Po pár úpravách dostáváme rovnici:

$$b = \frac{\sqrt{2}}{22}a^2 + \frac{11\sqrt{2}}{4}$$

ale to je Kurník Šopn Hauer dozajista rovnice paraboly. No tak vidíš, vše je zasejc OK.

Nyní již umíme najít rovnici obálky svazku křivic. A proto vzhůru za dalším dobro-družstvím!

3 Nefroida jakožto obálka svazku kružnic

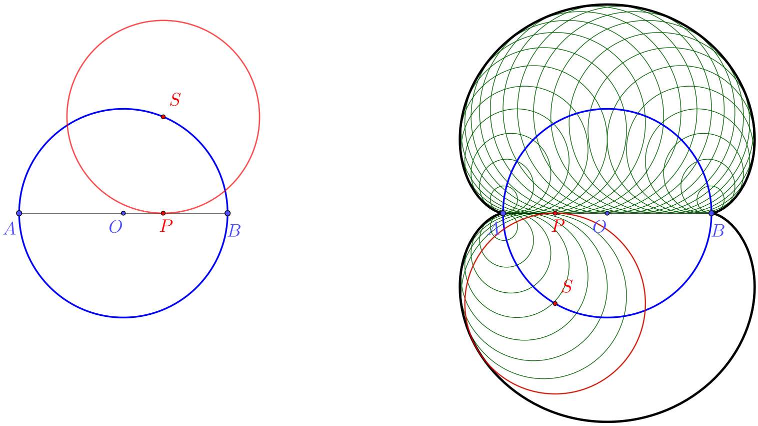
Čummež na obrázek 4a – je zde modrá kružnice se středem O a s průměrem AB. Dále je tu červená kružnice se středem S, který leží na kružnici první. Tato druhá kružnice se dotýká úsečky AB. Vezměme svzek všech takovýchto kružnic. Ukážeme, že obálkou tohoto svzku je **nefroida** (viz obr. 4b + odkaz na aplet v GeoGebře v popisu obrázku).

Čummež tedy nyní na obr. 5. Zvolíme souřadnou soustavu s počátkem ve středu O a poloměr modré kružnice zvolíme $2r$. Po modré kružnici putuje bod S, jeho parametr φ se mění od nuly do 2π a jeho souřadnice jsou zřejmě

$$S[2r\cos\varphi; 2r\sin\varphi]$$

Poloměr SP červené kružnice má velikost

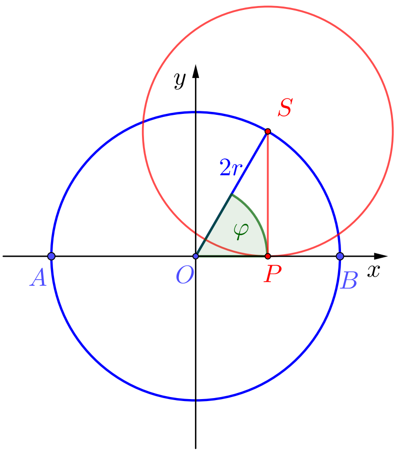
$$|SP| = 2r\sin\varphi$$



(a) (b)

Obr. 4:

https://www.geogebra.org/m/ue6byrpf



Obr. 5

.

Každá kružnice tvořící svazek má proto rovnici

$$(x - 2r\cos\varphi)^2 + (y - 2r\sin\varphi)^2 = (2r\sin\varphi)^2$$

Každý bod obálky tedy musí splňovat podmínku:

$$\boxed{(x - 2r\cos\varphi)^2 + (y - 2r\sin\varphi)^2 - 4r^2\sin^2\varphi = 0} \tag{8}$$

Vezmeme derivaci podle φ:

$$\begin{aligned}
2(x - 2r\cos\varphi)2r\sin\varphi - 2(y - 2r\sin\varphi)2r\cos\varphi - 8r^2\sin\varphi\cos\varphi &= 0\\
4r\sin\varphi(x - 2r\cos\varphi) - 4r\cos\varphi(y - 2r\sin\varphi) - 8r^2\sin\varphi\cos\varphi &= 0\\
\sin\varphi(x - 2r\cos\varphi) - \cos\varphi(y - 2r\sin\varphi) - 2r\sin\varphi\cos\varphi &= 0\\
x\sin\varphi - 2r\sin\varphi\cos\varphi - y\cos\varphi + \cancel{2r\sin\varphi\cos\varphi} - \cancel{2r\sin\varphi\cos\varphi} &= 0
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme druhou podmínku pro body obálky:

$$\boxed{x\sin\varphi - 2r\sin\varphi\cos\varphi - y\cos\varphi = 0} \tag{9}$$

Nyní již stačí ukázat, že nefroida, která je dána parametricky ve tvaru

Nefroida parametricky – stojatá osmička – tvar II.

$$\begin{aligned}
x &= 6r\cos\varphi - 4r\cos^3\varphi\\
y &= 4r\sin^3\varphi \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi)
\end{aligned} \tag{10}$$

splňuje obě podmínky (8) a (9).

Podmínka 1: Do levé strany (8) dosadíme za x a y z (10) a upravíme:

$$(6r\cos\varphi - 4r\cos^3\varphi - 2r\cos\varphi)^2 + (4r\sin^3\varphi - 2r\sin\varphi)^2 - 4r^2\sin^2\varphi =$$

$$
\begin{aligned}
(4r\cos\varphi - 4r\cos^3\varphi)^2 + (4r\sin^3\varphi - 2r\sin\varphi)^2 - 4r^2\sin^2\varphi &= \\
\left[4r\cos\varphi(1-\cos^2\varphi)\right]^2 + \left[2r\sin\varphi(2\sin^2\varphi - 1)\right]^2 - 4r^2\sin^2\varphi &= \\
16r^2\cos^2\varphi\sin^4\varphi + 4r^2\sin^2\varphi(2\sin^2\varphi-1)^2 - 4r^2\sin^2\varphi &= \\
4r^2\sin^2\varphi\left(4\cos^2\varphi\sin^2\varphi + (2\sin^2\varphi-1)^2 - 1\right) &= \\
4r^2\sin^2\varphi\left(4\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4\sin^4\varphi - 4\sin^2\varphi + 1 - 1\right) &= \\
4r^2\sin^2\varphi\cdot 4\sin^2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1)&
\end{aligned}
$$

Závorka v poslední rovnici je zřejmě rovna nule, takže první podmínka je splněna.

Podmínka 2: Do levé strany (9) dosadíme za x a y z (10) a upravíme:

$$
\begin{aligned}
(6r\cos\varphi - 4r\cos^3\varphi)\cdot\sin\varphi - 2r\sin\varphi\cos\varphi - 4r\sin^3\varphi\cos\varphi &= \\
4r\sin\varphi\cos\varphi - 4r\cos^3\varphi\sin\varphi - 4r\sin^3\varphi\cos\varphi &= \\
4r\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)&
\end{aligned}
$$

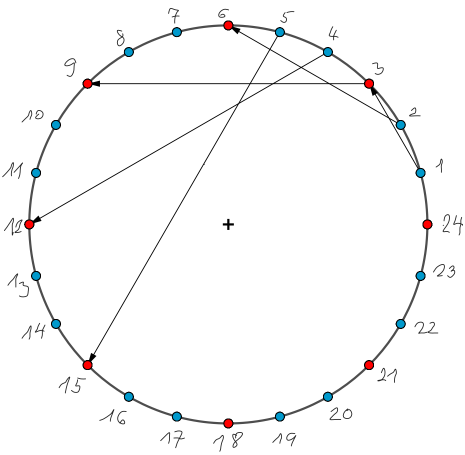
Závorka v poslední rovnici je opět rovna nule, takže i druhá podmínka je splněna.

Dokázali jsme, že obálkou svazku červených kružnic je vskutku nefroida.

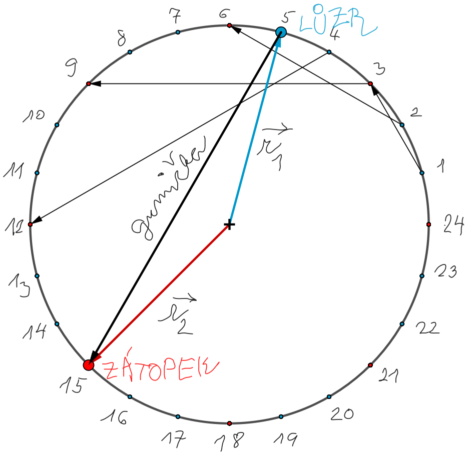
4 Nefroida jakožto obálka svazku tětiv

Vezmeme kružnici a na jejím obvodu umístíme ve shodných vzdálenostech $3n$ bodů, které si očíslujeme. V obrázku 6a máme například $3n = 24$. No a teďkonc je začneme spojovat tak, že bod s číslem k spojíme s bodem, jehož číslo je $3k$. Tedy $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 9$ atd.

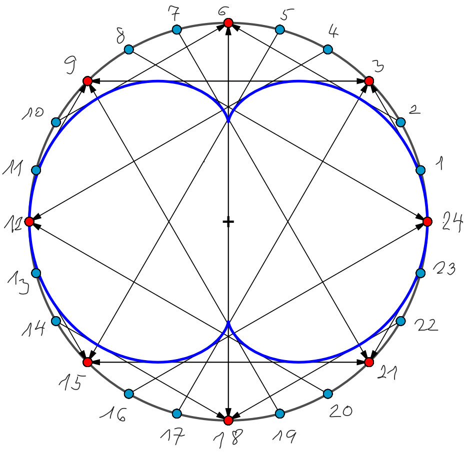
Můžeme to pojmout i fysikálně a dynamicky – jakožto pohyb dvou závodníků po kružnici, kdy jeden (*Emil Zá-topek*) se pohybuje



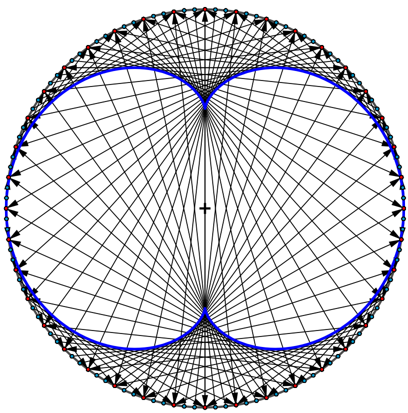
(a) $3n = 24$ Spojíme bod $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 6, 3 \mapsto 9$ atd.



(b) Zátopek je 2× rychlejší než soupeř. Gumička pulsuje.



(c) Tyto tětivy tvrdí, že jsou tečnami nefroidy!



(d) Tak to zahustíme ($3n = 120$). Ty ve, ony snad mluví pravdu!

Obr. 6: Zázračné tětivy

https://www.geogebra.org/m/s8wubbpt

trojnásobnou úhlovou rychlostí než jeho soupeř (*Alois Looser*) a tětivou je gumička, kterou jsou spojeni (obr. 6b).

Ať tak či onak – dostaneme množinu tětiv (obr 6c). No a vokazuje se, že tyto tětivy jsou tečnami nefroidy, tedy že nefroida je jejich obálkou (obr. 6c a 6d). Krástně to vidíme i v apletu v Geově Gebře (odkaz v popisu obrázku).

Ólrajt – ale teď to musíme pro-kázat. Najdeme rovnici tečny a tětivy a ukážeme, že jsou to totožné přímky.

Rovnice tečny: Vezmeme parametrickou rovnici ležaté nefroidy

$$Z = 3re^{i\varphi} + re^{i3\varphi}; \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi)$$

Pro jednoduchost můžeme předpokládat $r = 1$:

$$Z = 3e^{i\varphi} + e^{i3\varphi}; \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi)$$

Pro dané φ dostáváme příslušný bod nefroidy vyjádřený komplexním číslem

$$Z = 3e^{i\varphi} + e^{i3\varphi}$$

V tomto bodě hledáme tečnu. Komplexní číslo Z můžeme chápat také jako **polohový vektor** $\vec{r}$ tohoto bodu. My potřebujeme **směrový vektor tečny**, který dostaneme derivací rovnice křivky podle parametru φ:

$$Z' = 3ie^{i\varphi} + 3ie^{i3\varphi} \mapsto ie^{i\varphi} + ie^{i3\varphi}$$

Stačí, když vezmeme jeho třetinu. Parametrická rovnice tečny je tedy

$$X = Z + t \cdot Z'; \quad t \in \mathbb{R}$$

Po dosazení:

$$\boxed{X = (3e^{i\varphi} + e^{i3\varphi}) + t \cdot (ie^{i\varphi} + ie^{i3\varphi}); \quad t \in \mathbb{R}} \tag{11}$$

Rovnice tětivy: Kružnice, jejíž tětivy obalují nefroidu má zřejmě poloměr $4r = 4$. Její parametrická rovnice je tedy

$$X = 4e^{i\varphi}; \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi)$$

Na kružnici vezmeme libovolný bod $A = 4e^{i\varphi}$ a spojíme ho s bodem $B = 4e^{i3\varphi}$. Přímka AB je hledaná tětiva. Její směrák je

$$B - A = 4e^{i3\varphi} - 4e^{i\varphi} \mapsto e^{i3\varphi} - e^{i\varphi}$$

Stačí, když vezmeme čtvrtinu. Její parametrická rovnice je

$$X = A + p \cdot (B - A); \quad p \in \mathbb{R}$$

Po dosazení

$$\boxed{X = 4e^{i\varphi} + p \cdot (e^{i3\varphi} - e^{i\varphi}); \quad p \in \mathbb{R}} \tag{12}$$

Chceme ukázat, že přímky (12) a (11) jsou totožné. Tedy že

1. jeden směrák je **reálným** násobkem druhého,
2. bod jedné z přímek leží na přímce druhé.

Bod 1: Vezmeme podíl směráků a ukážeme, že vznikne **reálné číslo**:

$$\frac{ie^{i\varphi} + ie^{i3\varphi}}{e^{i3\varphi} - e^{i\varphi}} = i \cdot \frac{e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}}{e^{i3\varphi} - e^{i\varphi}} = i \cdot \frac{e^{i\varphi}(e^{i2\varphi} + 1)}{e^{i\varphi}(e^{i2\varphi} - 1)} = i \cdot \frac{e^{i2\varphi} + 1}{e^{i2\varphi} - 1}$$

Poslední zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým k číslu ve jmenovateli (princip dělení dvou komplexních čísel), což je zřejmě $e^{-i2\varphi} - 1$:

$$i \cdot \frac{e^{i2\varphi} + 1}{e^{i2\varphi} - 1} \cdot \frac{e^{-i2\varphi} - 1}{e^{-i2\varphi} - 1} = i \cdot \frac{\cancel{e^0} - e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi} \cancel{- 1}}{e^0 - e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi} + 1} = i \cdot \frac{-Z + \overline{Z}}{2 - Z - \overline{Z}} =$$

$$= i \cdot \frac{\overline{Z} - Z}{2 - (\overline{Z} + Z)} = i \cdot \frac{(a - bi) - (a + bi)}{2 - (a - bi + a + bi)} = i \cdot \frac{-2bi}{2 - 2a} = \frac{b}{1 - a}$$

Protože a, b jsou reálná čísla, je i $\frac{b}{1-a}$ (pro $a \neq 1$) reálné, což jsme chtěli ukázat. Přitom zřejmě platí $a = \cos 2\varphi$ a $b = \sin 2\varphi$. Podmínka $a \neq 1$ tedy znamená $\cos 2\varphi \neq 1$, tedy

$$\varphi \neq 0; \pi$$

To odpovídá situaci, kdy tětiva splyne do jednoho bodu.

Bod 2: Vezmeme bod tětivy $4e^{i\varphi}$ a ukážeme, že leží také na tečně – dosadíme ho do rovnice tečny (11) a přesvědčíme se, že parametr t bude reálné číslo:

$$\begin{aligned} 4e^{i\varphi} &= 3e^{i\varphi} + e^{i3\varphi} + t \cdot (ie^{i\varphi} + ie^{i3\varphi}) \\ e^{i\varphi} - e^{i3\varphi} &= t \cdot (ie^{i\varphi} + ie^{i3\varphi}) \\ \cancel{e^{i\varphi}}(1 - e^{i2\varphi}) &= \cancel{e^{i\varphi}} t \cdot i(1 + e^{i2\varphi}) \\ t &= \frac{1 - e^{i2\varphi}}{i(1 + e^{i2\varphi})} = i \cdot \frac{e^{i2\varphi} - 1}{e^{i2\varphi} + 1} \end{aligned}$$

Dle postupu v **Bodě 1** je zřejmě

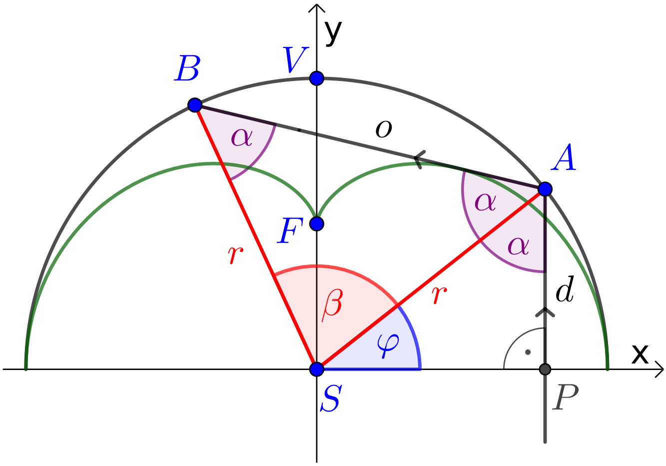
$$t = i \cdot \frac{2 - 2a}{-2bi} = \frac{a - 1}{b}$$

Tedy t je reálné.

Ukázali jsme tedy, že tětivy jsou vskutku tečnami, takže nefroida je jejich obálkou.

5 Nefroida jakožto kaustika kulového zrcadla

Čummež na obr. 7. Na kulové zrcátko dopadá paprsek d rovnoběžný s optickou osou a v bodě A s azimutem φ se odráží do bodu B s azimu-



Obr. 7

tem $\varphi + \beta$. Kolmice dopadu je SA. Úhel dopadu se rovná úhlu odrazu, tedy

$$\angle PAS = \angle SAB = \alpha$$

Z ΔSAP dostáváme

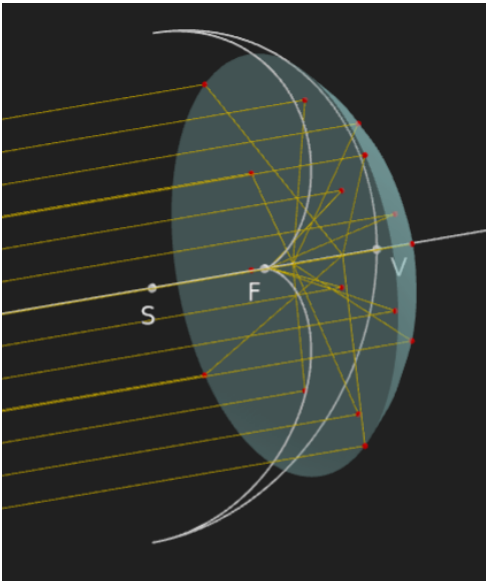
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi \tag{13}$$

Trojúhelník ABS je rovnoramenný, pročež $\angle ABS = \alpha$. Z ΔABS dostáváme

$$\beta = \pi - 2\alpha = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2\varphi \tag{14}$$

Azimut bodu B je tedy $\varphi + \beta = 3\varphi$ a tětiva AB tvořená odraženým paprskem je tedy dle předchozí kapitolky tečnou nefroidy, takže kaustika odražených paprsků je opravdu nefroida.

Skutečné kulové zrcadlo je ve $3D$, takže obálkou odražených paprsků je kaustická plocha, která vznikne rotací půlky nefroidy kolem osy zrcadla (obr. 8).



Obr. 8:

https://www.geogebra.org/classic/najdkam7

Další aplety související s kaustikou u zrcadel:

https://www.geogebra.org/m/NSmwQ8tZ#chapter/1220

Δ

Da Sista Les

∞