3 Elipse

PIENSA Y CALCULA

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 5 m, y un cateto, 4 m. Halla mentalmente la medida del otro cateto.

EVITAR ERRORES

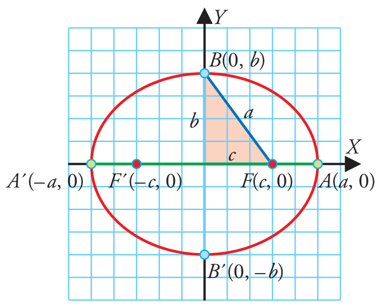
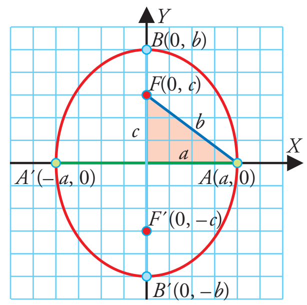
Si los focos están en el eje *Y*, la constante es igual a $2b$

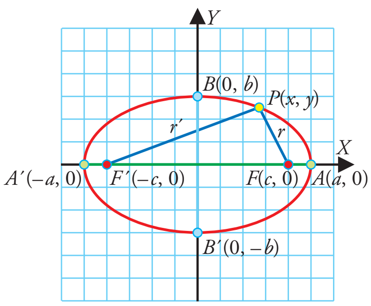
3.1 Elipse

Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

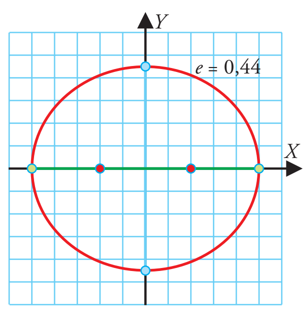
Ecuación reducida

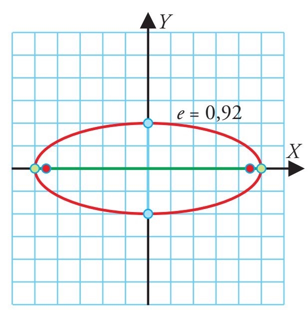
Focos en el eje X		Focos en el eje Y	
$a > b$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Relación fundamental: $a^2 = b^2 + c^2$		$a < b$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Relación fundamental: $b^2 = a^2 + c^2$	



Elementos de la elipse con los focos en el eje *X*

- **Puntos:**
  a) **Centro:** es el punto de intersección de los ejes: $O(0, 0)$
  b) **Vértices:** son los puntos: $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$
  c) **Focos:** son los puntos fijos: $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$
- **Segmentos:**
  a) **Eje principal** o **eje focal:** es el segmento AA', cuya longitud es $d(A, A') = 2a$
  b) **Eje secundario:** es el segmento BB', cuya longitud es $d(B, B') = 2b$
  c) **Distancia focal:** es la longitud del segmento FF': $d(F, F') = 2c$
  d) **Radiovectores:** son los segmentos $r = PF$ y $r' = PF'$
- **Excentricidad:**
  La **excentricidad de una elipse** es el cociente: $e = c/a$. Como en una elipse $0 < c < a$, la excentricidad será siempre positiva y menor que 1. Si la excentricidad es pequeña, cercana a cero, la elipse se parece a una circunferencia, y si es grande, cercana a uno, estará muy achatada.





EJERCICIO RESUELTO

7 **Se tiene una elipse con focos en el eje *X* en la que $a = 5$ y $c = 4$. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.**

Aplicando la relación fundamental o teorema de Pitágoras, se tiene:

$b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow$ ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

- Puntos:
  a) Centro: $O(0, 0)$
  b) Vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 3)$ y $B'(0, -3)$
  c) Focos: $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$
- Segmentos:
  a) Eje principal: $2 \cdot 5 = 10$
  b) Eje secundario: $2 \cdot 3 = 6$
  c) Distancia focal: $2 \cdot 4 = 8$
- Excentricidad: $e = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

3.2 Elipse centrada en el punto $C(m, n)$

La ecuación reducida de una elipse de centro el punto $C(m, n)$ se obtiene haciendo una traslación; x se sustituye por $x - m$, e y, por $y - n$

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

3.3 Dibujo de la elipse: método del jardinero

Construye un jardín con forma de elipse en el que el eje mayor mida 20 m, y el eje menor, 12 m

Por tanto: $2a = 20 \Rightarrow a = 10$ m; $2b = 12 \Rightarrow b = 6$ m

Aplicando la relación fundamental: $c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{100 - 36} = 8$ m

Se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se clavan dos estacas, una en cada foco, que distan $2c = 2 \cdot 8 = 16$ m

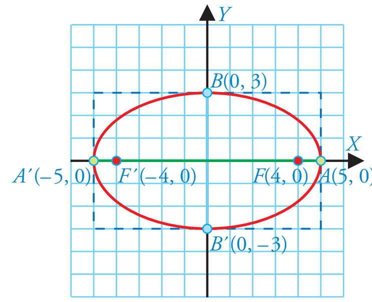
b) Se coge una cuerda de longitud un poco mayor que el eje mayor, algo más de 20 m

c) Se ata cada extremo de la cuerda en la base de cada una de las estacas que están en los focos, de forma que la cuerda libre mida exactamente 20 m

d) Con una estaca móvil se tensa la cuerda apoyada en la base y se hace un surco en el suelo.

RECUERDA

Para dibujar una elipse a mano alzada, se hace un rectángulo centrado en el origen, de longitud $2a$ y altura $2b$, y se inscribe dentro la elipse.



EJERCICIO RESUELTO

8 **Halla la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto $C(3, 1)$ y en la que $a = 5$ y $b = 2$**

$$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$