DETERMINANTES

Índice:

1. Introducción

*Los orígenes de los determinantes se remontan a mediados del siglo XVII, que aparecen en las expresiones explícitas de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, proporcionados por matemáticos como **MacLaurin** o **Cramer**, y la teoría de los determinantes parece ser que fue iniciada por matemáticos como **Leibnitz** en Europa y **Seki Kowa** en Japón y posteriormente tratada por **Laplace** y **Vandermonde**. **Cauchy** desarrolló la teoría en la forma que actualmente conocemos, y utilizó por primera vez la palabra determinante.*

2. Determinantes

Teniendo en cuenta que para el cálculo determinantes utilizamos las permutaciones de sus elementos, veamos algunas cuestiones relativas a las permutaciones:

- Una **permutación** σ de un conjunto A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es una aplicación biyectiva

$$\sigma : A \to A : a_i \to \sigma(a_i) = a_j \quad \text{, que representamos como } \sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$$

 # Ejemplo.- Con los tres primeros números naturales 1, 2 y 3, se pueden generar 3! = 6 permutaciones que son:(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).

Que también, podemos expresar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Una **transposición** o **inversión** es una permutación que solo deja invariante dos elementos.

 # Ejemplo.- En la permutación (2, 1, 3) de los tres primeros números naturales, lo elementos 1 y 2 forman la inversión (1, 2).

- Toda permutación, se puede descomponer como producto de transposiciones.

 # Ejemplo.- La permutación $\alpha = (4,2,1,3,5,6)$ *de los seis primeros números naturales, la podemos obtener a partir de la permutación principal, aplicando las siguientes inversiones:*

$$(1,2,3,4,5,6) \xrightarrow[(\sigma_1(1)=4,\sigma_1(4)=1)]{} (4,2,3,1,5,6) \xrightarrow[(\sigma_1(1)=3,\sigma_1(3)=1)]{} (4,2,1,3,5,6)$$

Así, podemos expresar la siguiente composición

$$\alpha = (4,2,1,3,5,6) \circ (4,2,3,1,5,6) \circ (1,2,3,4,5,6)$$ [1]

1 *Si* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *es un conjunto numérico de n elementos y* G_n *el conjunto de permutaciones de A. Si* $\circ$ *es la composición de permutaciones, entonces* $(G_n, \circ)$ *es una grupo, cuyo elemento neutro es la permutación principal.*

Que podemos expresar en forma simplificada como

$$\alpha=(1,3)\circ(1,4)\circ(1,2,3,4,5,6)=(4,2,1,3,5,6)$$

O también, podemos expresar como:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&1&3&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&3&1&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$$

- Sea un conjunto $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ numérico de n elementos y G_n el conjunto de permutaciones de A. Podemos definir la **función paridad**:

$$p:G_n\rightarrow\{-1,+1\}$$
$$\sigma\ \rightarrow p(\sigma)=\begin{Bmatrix}-1 & \text{Si el número de inversiones es impar}\\+1 & \text{Si el número de inversiones es par}\end{Bmatrix}$$

 # Ejemplo.- Si consideramos $A_6=\{1,2,3,4,5,6\}$, como la permutación $\alpha=(4,2,1,3,5,6)$ se obtiene mediante dos inversiones ($\alpha=(1,3)\circ(1,4)\circ(1,2,3,4,5,6)$), su paridad es (+1).

- Una descomposición de permutaciones no tiene por que ser única, pero si lo es la paridad.
- Si $A=\{1,2,3,\dots,n\}$, al conjunto de permutaciones de A se le denota por S_n.
- La permutación principal o natural de los n primero números naturales es la permutación en la que dichos números están colocados en su orden natural: $\alpha=(1,2,3,\dots,n)$.

Si $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden n (*con coeficientes reales*), denominamos <u>**determinante**</u> de A, al valor *(desarrollado por filas o por columnas)*

$$det\ A=|A|=\sum_{\sigma\in S_n}p(\sigma).a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}.a_{3\sigma(3)}\dots a_{n\sigma(1)}=\sum_{\sigma\in S_n}p(\sigma).a_{\sigma(1)1}.a_{\sigma(2)2}.a_{\sigma(3)3}\dots a_{\sigma(1)3}$$

Donde, la suma se extiende a todas las permutaciones σ del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ y $p(\sigma)$ denota la paridad de σ.

 # Ejemplo.- Si $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$ *, su determinante será*

$$|A|=\left|\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}\right|=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$
$$=1.1.1-1.0.1-2.0.1+2.0.(-2)+(-1).0.1-(-1).1.(-2)=-1$$

3. Determinantes de orden dos

Dada la matriz cuadrada de segundo orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

El determinante de A es el número

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Si designamos las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 por $F_{1,} F_{2,}$ y C_1, C_2 respectivamente, podemos también representar como $det(A) = det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = det(C_{1,} C_2)$. Además

- Si $A=0$ ⇨ $det(A)=0$
- Si $A=I_2$ ⇨ $det(A)=1$
- Si A es diagonal o triangular ⇨ $det(A)=a_{11}.a_{22}$

 # Ejemplos:

1.- $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -7$; *2.-* $\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-6) \cdot 1 = 5$

Una matriz cuadrada A es **regular** si y solo si $det(A) \neq 0$

 # Ejemplos:

1.- Como $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 1 \neq 0$, *A es una matriz regular.*

2.- Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$, *B es una matriz singular.*

4. Determinante de orden tres

Dada la matriz de orden tres

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El determinante de A es el número

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

Si designamos las filas 1, 2 y 3 y las columnas 1, 2 y 3 por $F_{1,} F_{2,} F_{3,}\ y\ C_{1,} C_2, C_3$ respectivamente, podemos también representar como $det(A)=det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}=det(C_{1,} C_{2,} C_3)$.

Además

- Si $A=0$ ⇨ $det(A)=0$
- Si $A=I_3$ ⇨ $det(A)=1$
- Si A es diagonal o triangular ⇨ $det(A)=a_{11}.a_{22}.a_{33}$

 # Ejemplos:

1.- $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-36+0-5-0+30-8=-19$

2.- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4+4+0+8-6-0=10$

- Una matriz cuadrada A es **regular** si y solo si $det(A)\neq 0$

  # Ejemplo:

  Como $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=24+0+0-0-0-0=24\neq 0$*, A es regular*

- Para resolver los determinantes de orden tres, es conveniente recordar la REGLA DE SARRUS:
  - Los productos con signo + están formados por los elementos de la diagonal principal y los de las dos diagonales paralelas con su vértice opuesto correspondiente.
  - Los productos con signo menos (-) están formados por los elementos de la diagonal secundaria y los de las dos diagonales paralelas con su vértice opuesto correspondiente.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

- *Una forma práctica de aplicar la regla de Sarrus es, escribir debajo de la matriz sus dos primeras filas.*
  - *Los términos positivos de la regla de Sarrus serán ahora los términos de la diagonal principal y su dos paralelas.*
  - *Y los términos negativos serán los términos de la diagonal secundaria y sus dos paralelas*

  # Ejemplo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=45+96+84-105-48-72=0$$

5. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

Dado un determinante de orden tres, podemos observar que se cumple

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}=$$

$$=a_{11}\cdot\left(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32}\right)-a_{12}\cdot\left(a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31}\right)+a_{13}\cdot\left(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31}\right)=$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Es decir, se puede obtener mediante la suma de los determinantes de segundo orden, asociados a los elementos $a_{11}, a_{12}\, y\, a_{13}$ (*que se obtienen suprimiendo la fila y la columna a la que pertenecen dichos elementos*), y multiplicados cada determinante por dicho número asociado, Además, el signo que lo precede es + o -, según la suma de los subíndices sea par o impar, respectivamente.

Por este procedimiento el determinante de tercer orden, se puede expresar como suma de productos de los elementos de una fila o columna, por determinantes de segundo orden.

Este procedimiento, se puede generalizar para matrices de orden mayor que tres.

MATRIZ COMPLEMENTARIA M_{ij} DE UN ELEMENTO a_{ij} .

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno de sus elementos. Si en A se suprime la fila i y la columna j, se obtiene una submatriz M_{ij} , que recibe el nombre de **matriz complementaria del elemento a_{ij} .**

 # Ejemplo

$$Si \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad M_{23}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

ADJUNTO $Adj\,a_{ij}$ DE UN ELEMENTO DE UN ELEMENTO a_{ij} .

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno de sus elementos. Se denomina **Adjunto del elemento** a_{ij} y se representa por $Adj\,a_{ij}$ al valor

$$Adj\,a_{ij}=(-1)^{i+j}.\,Det(M_{ij})$$

 # Ejemplo

$$Si \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad Adj\,a_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

DEFINICIÓN DE UN DETERMINANTE POR RECURRENCIA.

Sea A una matriz cuadrada de orden n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

el valor del determinante lo podemos desarrollar por recurrencia mediante cualquier fila i o cualquier columna j ($i,j\in\{1,2,,3,...,n\}$), de la matriz A, mediante

$$det\,A=a_{i1}.\,Adj\,a_{i1}+a_{i2}.\,Adj\,a_{i2}+...+a_{in}.\,Adj\,a_{in}$$

o

$$det\,A=a_{1j}.\,Adj\,a_{1j}+a_{2j}.\,Adj\,a_{2j}+...+a_{nj}.\,Adj\,a_{nj}$$

 # Ejemplo

$$A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ -3 & 1 & 3 & 3\\ 4 & 0 & -4 & 4\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -3 & 3 & 3\\ 4 & -4 & 4\end{vmatrix}-1.\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 4 & -4 & 4\end{vmatrix}=2.48-1.24=72$$

que lo hemos desarrollado por la segunda columna.

6. Propiedades de los determinantes

PROPIEDADES Y OPERACIONES.

1.- Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponerse en dos sumandos, entonces, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y el segundo sumando, respectivamente y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial. Es decir, para el caso de n = 3, se cumplirá

$$\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

 # Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}9 & 8 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

2.- Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}k.a_{11} & k.a_{12} & k.a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k.\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

 # Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}9 & 8 & 7\\ 3 & 2 & 3\\ 12 & 5 & 6\end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix}3 & 8 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

3.- Si A y B son dos matrices cuadradas, entonces $det(A.B)=det\,A\,.\,det\,B$

 # Ejemplo:

$$det\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}=(-1).(-1)=1$$

PROPIEDADES Y DEPENDENCIA.

4.- Si cambiamos entre sí dos filas o columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo respecto al inicial. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

$$\#\,Ejemplo:\quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\2 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

5.- Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna con todos los elementos nulos, su determinación es cero. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & 0\\a_{21} & a_{22} & 0\\a_{31} & a_{32} & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\#\,Ejemplo:\quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

6.- Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=0$$

$$\#\,Ejemplo:\quad \begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

7.- Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es cero. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}a_{11} & k.a_{12} & a_{13}\\a_{21} & k.a_{22} & a_{23}\\a_{31} & k.a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k.\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0$$

 # Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

7.- Si una fila o columna de una matriz cuadrada es combinación lineal de las restantes filas o columnas, su determinante es cero. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k.a_{11}+h.a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & k.a_{21}+h.a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & k.a_{31}+h.a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + h.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

 # Ejemplo: $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

TRANSFORMACIONES PARA SIMPLIFICAR EL CÁLCULO DE DETERMINANTES.

9.- Si una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela no varía. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{vmatrix}$$

10.- Si una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela proporcional, no varía. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k.a_{11} & k.a_{12} & k.a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k.a_{11}+a_{31} & k.a_{12}+a_{32} & k.a_{13}+a_{33} \end{vmatrix}$$

 # Ejemplo: Para calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *, restando la primera fila a las otras dos, resulta* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

7. Cálculo de determinantes por el método pivotal

El método pivotal, se utiliza para calcular determinantes de orden mayor que tres, y consiste en transformar un determinante de orden n, en otro de orden $n-1$. Aplicando para ello los siguientes pasos:

- Se toma el elemento a_{ij} cualquiera del determinante que valga uno. A este elemento se le denomina pivote.

  Si el determinante considerado no tuviera ningún elemento que valga uno, tomaríamos cualquiera que tuviese un valor $a_{ij}=k\neq 0$.

  En este caso se podría dividir todos los elementos de su fila i, o todos los de su columna j, ente el número k, por lo que el el elemento a_{ij} se convertiría en uno,

  Al realizar esta operación, hay que tener en cuenta que el determinante quedaría multiplicado externamente por k.
- Los elementos correspondientes a la fila y columna pivote se suprimen.
- Los demás elementos del determinantes se remplazan por la diferencia entre ellos mismos y el producto de los elementos que corresponden a su fila y su columna en la fila i y en la columna j del pivote.
- El nuevo determinante que será de orden menor que el inicial, tendrá el signo $(-1)^{ij}$

Este proceso se puede repetir tantas veces como sea necesario hasta obtener un determinante de orden tres.

 # Ejemplo.-

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-7.1 & 0 & 1 & 5-5.1 \\ 3-7.4 & 1 & 4 & 0-5.4 \\ 2-7.1 & -3 & 1 & 6-5.1 \\ 4-7.(-3) & 5 & -3 & 2-5.(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -25 & 1 & 4 & -20 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 25 & 5 & -3 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -25 & 1 & -20 \\ -5 & -3 & 1 \\ 25 & 5 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}.5.\begin{vmatrix} -5 & 1 & -20 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 510$$

8. Cálculo de determinantes por el método de Gauss

Para calcular un determinante por el método de Gauss, transformamos el determinante en uno triangular, y el determinante será el producto de los elementos de la diagonal principal del nuevo determinante.

 # Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_3-3F_1}{\Rightarrow F_2-4F_1 \Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -17 \\ 0 & 7 & -10 \end{vmatrix} \underset{-9F_3}{\Rightarrow 7F_2 \Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 63 & -119 \\ 0 & -63 & 90 \end{vmatrix}$$

$$\underset{F_3+F_2}{\Rightarrow \quad \Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 63 & -119 \\ 0 & 0 & -29 \end{vmatrix} = 1.63.(-29) = -1827$$

9. Cálculo de la matriz inversa

MATRIZ ADJUNTA.

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A y se representa por **Adj A**, a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su Adjunto $Adj\, a_{ij}$.

 # Ejemplo

$$Si \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Adj\, A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA.

Una matriz cuadrada A es **inversible** si y solo si $det(A) \neq 0$. Si A no es inversible, decimos que es **singular.** Además, si una matriz cuadrada A tiene inversa A^{-1} , se cumplirá

$$A.A^{-1} = I \Rightarrow |A.A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A|.|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0$$

Y será:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{det\, A}\right).(Adj\, A)^t$$

 # Ejemplo.- Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \left(\frac{1}{det\, A}\right).(Adj\, A)^t = \left(\frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}\right).\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

10. Rango de la matriz

Denominamos **menores de orden p de una matriz A** a los determinantes de las submatrices cuadradas de orden p.

 # Ejemplo,- *Si* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *, los menores de orden 2 serán*

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2\ ;\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\ ;\ \begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

El rango de una matriz A, rango(A), es el orden del mayor menor no nulo de dicha matriz

 # Ejemplo.-

Si $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & -2\\ -3 & 1 & 2 & 5\\ -1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ *, su rango no puede ser tres, ya que*

$$\left|\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right|=0\ ;\ \left|\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -3 & 1 & 5\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\right|=0\ ;\ \left|\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -3 & 2 & 5\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\right|=0\ ;\ \left|\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -3 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\right|=0$$

Sin embargo, dado de que existe algún menor de orden dos, por ejemplo

$$\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

tenemos que rango(A) = 2

11. Resolución de sistemas de ecuaciones matriciales

La resolución de la ecuación matricial $A\,X=B$, siendo A inversible, se puede resolver mediante la operación

$$A^{1}.A.X=A^{1}.B \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad X=\left(\frac{1}{det\ A}\right).(Adj\ A)^{t}.B$$

 # Ejemplo.- Si $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

Ya que $A^{-1}=\left(\frac{1}{det\ A}\right).(Adj\ A)^{t}=\left(\frac{1}{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}}\right).\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}\frac{4}{10} & -\frac{2}{10}\\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$