3. Schnitt von Kugel und Kegel

Die Kegelachse werde als z-Achse und die Spitze des Kegels als Koordinatenursprung gewählt. Weiter sei die x-Achse so gewählt, dass der Kugelmittelpunkt in der xz-Ebene zu liegen kommt. Er habe mithin die Koordinaten $(s|0|u)$. Für die Radien R des Kegels in Höhe $z = \pm 1$ und r der Kugel findet man sodann die Gleichungen:

(I) $x^2 + y^2 - R^2 z^2 = 0$

(II) $(x-s)^2 + y^2 + (z-u)^2 = r^2$

Aus der Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich also

$$2s \cdot x = s^2 - r^2 + (z-u)^2 + R^2 z^2 \qquad (*)$$

Für $s = 0$ vereinfacht sich dies zu

$$-r^2 + (z-u)^2 + R^2 z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+R^2)z^2 - 2uz + (u^2 - r^2) = 0$$

Für $D = 4 \cdot \left(u^2 - (1+R^2)(u^2 - r^2)\right) \geq 0$ hat diese Gleichung die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - (1+R^2)(u^2 - r^2)}}{1+R^2}$$

Setze $h_1 = \frac{u+\sqrt{u^2-(1+R^2)(u^2-r^2)}}{1+R^2}$ und $h_2 = \frac{u-\sqrt{u^2-(1+R^2)(u^2-r^2)}}{1+R^2}$. Aus Gleichung (I) folgt mit einer Parametrisierung der Lösungskurve in $y =: \eta$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{R^2 h_{1,2}^2 - \eta^2}$$

und schließlich

$$\gamma(\eta) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{R^2 h_{1,2}^2 - \eta^2} \\ \eta \\ h_{1,2} \end{pmatrix} \text{ mit } \eta \in \left[-R \cdot \left|h_{1,2}\right|; R \cdot \left|h_{1,2}\right|\right].$$

Sei jetzt $s \neq 0$. Dann ergibt sich x aus Gleichung (*) und nach einer Parametrisierung der Lösungskurve in $z =: \zeta$ zu

$$x = \frac{1}{2s} \cdot (s^2 - r^2 + (\zeta - u)^2 + R^2 \zeta^2)$$

und aus Gleichung (I) folgt wieder

$$y = \pm\sqrt{R^2 \zeta^2 - \frac{1}{4s^2} \cdot (s^2 - r^2 + (\zeta - u)^2 + R^2 \zeta^2)^2}$$

Schwieriger ist es diesmal eine geeignete Definitionsmenge anzugeben. Die Symmetrie zur xz-Ebene motiviert zusammen mit der Konvexität von Kugel und Kegel die (*unbewiesene*) Behauptung, dass die z-Koordinaten der Punkte auf den Lösungskurven ihre größten und kleinsten Werte für $y = 0$ annehmen. Hierfür lieferten die Gleichungen (I) und (II)

$$z_{min,max} = \pm\frac{x}{R}$$

$$(x-s)^2 + \left(\pm\frac{x}{R} - u\right)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{R^2}\right)x^2 - \left(2s \pm \frac{2u}{R}\right)x + s^2 + u^2 - r^2 = 0$$

Die Nullstellen der beiden zuletzt angeschriebenen quadratischen Gleichungen sind im Falle ihrer Existenz bis auf den Faktor $\frac{1}{R}$ gleich den gesuchten extremalen z-Koordinaten. In *geogebra* werden die maximal vier Nullstellen nach aufsteigender Größe ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 sortiert und die Definitionsintervalle $[\zeta_1; \zeta_2]$ und $[\zeta_3; \zeta_4]$ gebildet.

Nachfolgend sind zwei exemplarische Schnitte gezeigt.