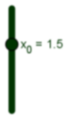
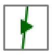
<u>Δραστηριότητα 1:</u>
Εφαπτομένη συνάρτησης σε σημείο της γραφικής της παράστασης – Ορισμός και γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου σε x_0

Στη δραστηριότητα, αρχικά, δίνεται μία προεπιλεγμένη συνάρτηση f και ένα σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ τής γραφικής της παράστασης.



Μέσω του αντίστοιχου δρομέα μπορούμε να αλλάζουμε τη θέση του σημείου A πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(Οι τιμές του δρομέα αλλάζουν είτε σύροντας με το ποντίκι είτε επιλέγοντάς τον με αριστερό κλικ και χρησιμοποιώντας τα πλήκτρα κατεύθυνσης (βελάκια) του πληκτρολογίου).

1. Επίλεξε το κουτί «Ευθεία από το A». Εμφανίζεται μία τυχαία ευθεία που διέρχεται από το A, την οποία μπορείς να περιστρέφεις από το «πράσινο σημείο». 
   Αφού πειραματιστείς με διάφορες θέσεις αυτής της ευθείας, απάντησε στα ακόλουθα ερωτήματα:

   Αν μία ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, τότε είναι βέβαιο ότι είναι εφαπτομένη;

   Η εφαπτομένη σε κάποιο σημείο της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f έχει πάντα ένα μόνο κοινό σημείο με αυτήν;

ΣΧΟΛΙΟ: Τα συμπεράσματα αυτά μας οδήγησαν στην αναγκαιότητα δημιουργίας ενός άλλου ορισμού για την εφαπτομένη σε σημείο συνάρτησης.

2. Δώσε στο δρομέα την τιμή $x_0 = 0$ οπότε έχεις το σημείο $A\left(0, f(0)\right)$.
   Επίλεξε το κουτί «Εμφάνιση Στοιχείων», οπότε εμφανίζεται ένα μεταβλητό σημείο $M\left(x, f(x)\right)$ της γραφικής παράστασης της f δεξιά του x_0 και ένα, επίσης μεταβλητό, σημείο $N\left(x, f(x)\right)$ αριστερά του x_0.
   Επιπλέον εμφανίζονται και οι ημιευθείες AM , AN.
   Με τους μετρητές h_1 και h_2 μετακινούνται τα σημεία M , N αντίστοιχα.
   Με τα κουμπιά «κίνηση M» και «κίνηση N» κάνεις τα σημεία M, N να «κινηθούν» προς το A.

3. Ερώτημα : Με τι ισούται ο συντελεστής διεύθυνσης κάθε ημιευθείας;
   $$\lambda_{AM} = \frac{f\left(x_M\right) - f\left(x_0\right)}{x_M - x_0} \quad \text{και} \quad \lambda_{AN} = \frac{f\left(x_N\right) - f\left(x_0\right)}{x_N - x_0} .$$
   Επίλεξε τα κουτιά «Εμφάνιση κλίσεων» , «Κλίση AM» και «Κλίση AN» για να εμφανίσεις τις αντίστοιχες κλίσεις.

4. Άλλαξε τις τιμές του δρομέα **h_2** (εναλλακτικά κλικ στο κουμπί «κίνηση Ν»).

Παρατήρησε ότι το σημείο Ν πλησιάζει προς το σημείο Α. Πώς εκφράζεται η κίνηση αυτή με μαθηματικό τρόπο; « το σημείο Ν πλησιάζει στο Α» $\Leftrightarrow$ $x \to x_0^-$

Η ημιευθεία ΑΝ τείνει να πάρει μία «οριακή θέση» **η_2**. Τι συντελεστή διεύθυνσης θα έχει η ημιευθεία **η_2** ;

$$\lambda_2 = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

5. Συνέχισε με ανάλογο τρόπο μεταβάλλοντας το σημείο Μ. Πώς εκφράζεται η κίνηση του Μ προς το Α με μαθηματικό τρόπο; « το σημείο Μ πλησιάζει στο Α» $\Leftrightarrow$ $x \to x_0^+$

Η ημιευθεία ΑΜ τείνει να πάρει μία «οριακή θέση» **η_1**. Τι συντελεστή διεύθυνσης θα έχει η **η_1**;

$$\lambda_1 = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

6. Κάνε κλικ και στο κουτί «Γωνία ΑΜ, ΑΝ». Με βάση τις παρατηρήσεις σου, απάντησε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) Τι παρατηρείς για τη γωνία που σχηματίζουν οι ημιευθείες ΑΜ , ΑΝ ;

Απάντηση : τείνει να γίνει 180^o (εμφανίζουμε την αντίστοιχη γωνία)

β) Πώς λέγονται σε αυτή την περίπτωση οι ημιευθείες **η_1 , η_2** ;

Απάντηση : αντικείμενες .

γ) Ποια θα είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α και με τι θα ισούται ο συντελεστής διεύθυνσής της;

(κάνε κλικ στο κουτί «Εφαπτομένη» για επαλήθευση των συμπερασμάτων σου).

7. Αποεπίλεξε το κουτί «Εμφάνιση Στοιχείων» για να επιστρέψεις στην αρχική θέση και με τον αντίστοιχο δρομέα x_0 μετακίνησε το σημείο Α στη θέση $A(1, f(1))$.

Επανάλαβε την προηγούμενη διαδικασία των βημάτων 3 – 6.

Με βάση τις παρατηρήσεις σου, απάντησε στα ακόλουθα ερωτήματα:

Υπάρχει εφαπτομένη στο σημείο Α; Απάντηση: Όχι

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

Οι ημιευθείες η_1 , η_2 δεν είναι αντικείμενες, συνεπώς στο σημείο $A(1, f(1))$ δεν υπάρχει εφαπτομένη.

8. Μπορείς να ερμηνεύσεις τα παραπάνω συμπεράσματα με μαθηματικό (αλγεβρικό) τρόπο;

Ποια είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$$

Με τι ισούται ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Όταν $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Σε ποια περίπτωση δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την εφαπτομένη σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Όταν $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, δηλαδή όταν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

9. Κάνε κλικ στο κουτί «Εφαπτομένη» ώστε να εμφανίσεις την εφαπτομένη στο Α και μεταβάλλοντας τη θέση του σημείου Α με τον αντίστοιχο δρομέα, απάντησε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Πώς μπορούμε «οπτικά» να καταλάβουμε αν, σε κάποιο σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, υπάρχει εφαπτομένη;
- Υπάρχει περίπτωση η εφαπτομένη μίας συνάρτησης να έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης;
- Υπάρχει περίπτωση η εφαπτομένη μίας συνάρτησης να «διαπερνά» τη γραφική της παράσταση στο σημείο επαφής ;

10. Αποεπίλεξε το κουτί «Εμφάνιση Στοιχείων», επίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου συνάρτησης» και κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 5».

Αποεπίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου συνάρτησης», τοποθέτησε με τον αντίστοιχο δρομέα το σημείο Α στη θέση $A(1, f(1))$ και επανάλαβε όλη την προηγούμενη διαδικασία.

Τι παρατηρείς για την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α; Είναι κατακόρυφη

Τι συμβαίνει με το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ σε αυτή την περίπτωση;

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \text{ ή } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$$

Εναλλακτική δραστηριότητα

- Αποεπίλεξε το κουτί «Εμφάνιση Στοιχείων», επίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου συνάρτησης» και κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 3».

  Αποεπίλεξε το κουτί «επιλογή τύπου συνάρτησης», τοποθέτησε με τον αντίστοιχο δρομέα το σημείο Α στη θέση $A(1, f(1))$.

  Μπορείς να εκτιμήσεις αν στο Α υπάρχει εφαπτομένη;

  Κάνε κλικ στα κουτιά «Εμφάνιση Στοιχείων» και «Εφαπτομένη» για να επαληθεύσεις την εκτίμησή σου.

  Με τα κουμπιά “Zoom In» και «Zoom Out» μπορείς να μεγεθύνεις την περιοχή του σημείου Α όσο θέλεις για να «δεις» τι συμβαίνει.

Συμπέρασμα :

Η παρατήρηση μας οδηγεί μερικές φορές σε συμπεράσματα τα οποία είναι είτε εσφαλμένα είτε αμφισβητούμενα, συνεπώς, ο μόνος ασφαλής τρόπος για να ελέγξουμε την αλήθεια τους, είναι μέσω αυστηρής απόδειξης.