MATERIAL DE
APOIO PEDAGÓGICO
PARA APRENDIZAGENS
MAPA 2024

MATERIAL PARA O ESTUDANTE

Olá, estudantes!

Convidamos você a conhecer e utilizar os Cadernos MAPA. Esse material foi elaborado com todo carinho para que vocês possam realizar atividades interessantes e desafiadoras na sala de aula ou em casa. As atividades propostas estimulam as competências como: organização, empatia, foco, interesse artístico, imaginação criativa, entre outras, para que possam seguir aprendendo e atuando como estudantes protagonistas que são. Significa proporcionar uma base sólida para que vocês mobilizem, articulem e coloquem em prática conhecimentos, valores, atitudes e habilidades importantes na relação com os outros e consigo mesmo(a), para o enfrentamento de desafios, de maneira criativa e construtiva. Ficou curioso(a) para saber que convite é esse que estamos fazendo para você? Então não perca tempo e comece agora mesmo a realizar essa aventura pedagógica pelas atividades.

Bons estudos!

MATRIZ

CONTEXTUALIZAÇÃO E ABERTURA

Caro estudante, temos algumas atividades práticas desenvolvidas para que possam resolver em seus cadernos e também realizar uma prática de atividades no laboratório de informática com o uso do Geogebra para que criem suas próprias matrizes e possam visualizar como realizamos as operações no Geogebra.

Os estudos relacionados a matrizes e determinantes segundo Souza, (2020) têm suas origens datadas desde o século II a.C., com registros dos babilônios solucionando sistemas lineares de duas variáveis, encontrados em tabletes de argila. O texto "Nove Capítulos da Arte Matemática" dos chineses é um dos primeiros exemplos documentados com matrizes, fornecendo significativas contribuições nesse sentido. Embora essa jornada tenha começado na antiguidade, a verdadeira compreensão e avanços significativos surgiram no século XIX, um período marcado por notáveis avanços matemáticos.

A teoria dos determinantes surgiu quase simultaneamente na Alemanha e no Japão. Foi desenvolvida por dois matemáticos, Leibniz (1646-1716) e Seki Shinsuke Kowa(1642-1708), ao solucionarem um problema de eliminações necessárias à resolução de um sistema de m equações lineares com m incognitas.

A importância das matrizes na Matemática e no cotidiano humano é vasta, permeando áreas como Economia, Engenharia, Física, Biologia e Computação. Um exemplo concreto são os pixels em telas de computador, onde uma tela de 640 x 480 pixels é composta por uma matriz de 307.200 pontos, representando a área da tela. Cada ponto possui um endereço na matriz, indicado por um par (a,b) onde 'a' é a linha e 'b' a coluna, e armazena a informação de cor. Esse conceito se estende para telas de televisores, onde cada pixel pode conter um valor de zero a 255, representando 256 cores possíveis.

Dando continuidade

Matriz e suas propriedades

A matriz $\mathbf{m \times n}$ é uma tabela retangular ou quadrada com $\mathbf{m \cdot n}$ elementos dispostos em **m** linhas e **n** colunas, com a quantidade de elementos **m , n**

$\geq$ **1.** Dessa forma, o número de linhas é primeiro e depois o número de colunas. A matriz é uma tabela cujos elementos são os números escolhidos a partir de um conjunto numérico dos números reais.

Veja um exemplo:

A tabela indica o número de vendas efetuadas por uma concessionária de veículos durante o primeiro trimestre.

Tabela 1: Veículos/modelos vendidos por mês

Matriz	1ª coluna	2ª coluna	3ª coluna	4ª coluna
m x n	Veículos/mês	Janeiro	Fevereiro	Março
1ª linha	Honda City	20	18	25
2ª linha	Fiat Pulse	12	10	15
3ª linha	VW Polo	15	9	20
4ª linha	Hyundai Creta	18	15	21

Fonte: (Assis, 2023)

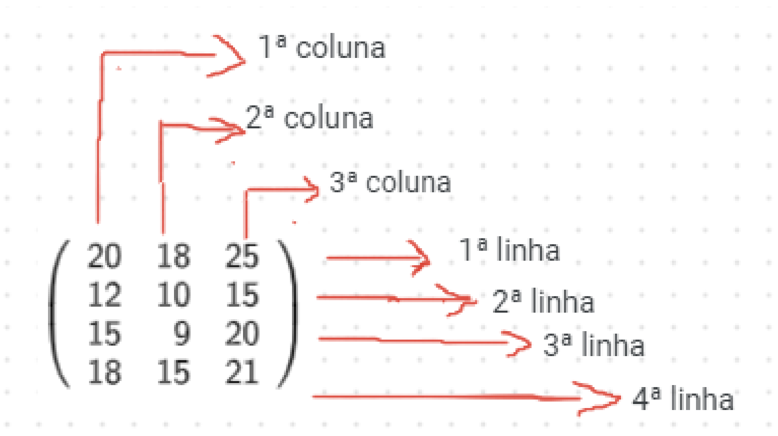
Se quisermos saber a quantidade de carros VW Polo vendidos em janeiro, iremos procurar o número na terceira linha e na primeira coluna da tabela.

Portanto, no quadro apresentado, os números colocados nas disposições horizontais (**m**) formam o que determinamos **linhas** e os colocados nas disposições verticais(**n**) chamamos de **coluna.** O conjunto ordenado dos números formam a tabela e é denominado **matriz** e cada número é chamado **elemento** da matriz.

Nesse exemplo acima, temos uma matriz do tipo 4 x 3(Lê-se: quatro por três), isto é, uma matriz formada por 4 linhas e três colunas.

Representa-se uma matriz colocando-se seus elementos entre parênteses ou colchetes.

Matriz 4 x 3



Fonte: (Assis, 2023)

Uma matriz A de ordem $m \times n$ pode ser representada genericamente por A = $(a_{ij})_{m \times n}$ e expressa da maneira apresentada ao lado.

Nessa matriz a_{ij} indica o elemento que está na linha *i* e coluna *j.* O elemento a_{13}(lê-se " a um tres"), por exemplo, tem *i = 1 e j = 3,* ou seja, ele está localizado na primeira linha e na terceira coluna.

Matriz Genérica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fonte: (Assis, 2023)

Exemplos de matrizes:

Matriz 1 x 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz 2 x 1

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matriz 2 x 3

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Matriz 2 x 2

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$$

Matriz 3 x 3

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz 4 x 4

$$F = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 100 & 200 & 300 & 400 \\ 1000 & 2000 & 3000 & 4000 \\ 10000 & 20000 & 30000 & 40000 \end{pmatrix}$$

Denominamos **Matriz Quadrada** toda matriz de ordem *m x n*, em que *m = n*, ou seja, as quantidades de linhas e de colunas são iguais. Nesse caso, podemos dizer que a matriz é de ordem n. Em uma matriz quadrada A = $(a_{ij})_n$, os elementos a_{ij} em que *i = j* formam a **diagonal principal da matriz.**

Igualdade de matrizes

Duas matriz A e B, de mesma ordem, são iguais quando cada elemento de A é igual ao correspondente (mesma posição) em B. Assim indicamos: *A=B.*

Para indicar que duas matrizes A e B são diferentes, ou seja, não tem a mesma ordem. ou não tem todos os elementos correspondentes iguais, escrevemos: *A ≠ B.*

Observe alguns exemplos:

1º Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$ e $$B = \begin{pmatrix} 2.4 & 10-5 \\ -2+1 & 8-4 \\ 2.3 & \dfrac{14}{2} \end{pmatrix}$$

As matrizes têm a mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais. Portanto, A*=B.*

2º Exemplo:

$C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

Os elementos das matrizes C e D, não tem a mesma ordem. Portanto, $C \neq D$.

3º Exemplo:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

As matrizes E e F têm a mesma ordem, porém os elementos $e_{21} \neq f_{21}$ são diferentes. Portanto $E \neq F$

Algumas matrizes recebem nomenclaturas especiais de acordo com as suas características, sendo elas:

- Matriz linha:
  Toda matriz de ordem $1 \times n$.
- Matriz coluna:
  Toda matriz de ordem $m \times 1$.
- Matriz diagonal:
  Toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- Matriz nula:
  Toda matriz m xn em que $a_{ij} = 0$ para quaisquer que sejam i e j. Indicamos a matriz nula de ordem $m \times n$ por $0_{m \times n}$.
- Matriz identidade:
  Toda matriz quadrada em que $a_{ij} = 1$ para que $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Indicamos a matriz identidade de ordem n por I_n.

Operações com matriz:

Soma de matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Produto de um número pela matriz.

$$2.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 2.6 \\ 2.7 & 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

Produto de uma matriz.

A grande novidade operacional entre matrizes é a multiplicação, sobre a qual falaremos a seguir.

Em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares.

Por exemplo, sejam A, C: $R^2 \rightarrow R^2$ transformações lineares dadas por

$A_{(x,y)} = (a_1x + b_1y,\ a_2x + b_2y)$
$C_{(x,y)} = (c_1x + d_1y,\ c_2x + d_2y),$

para todo v = (x, y) ∈ R^2.

As matrizes dessas transformações são, respectivamente,

$$a = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{pmatrix} c1 & d1 \\ c2 & d2 \end{pmatrix}$$

A transformação linear AC: $R^2 \rightarrow R^2$, chamada a composta de A e C (ou o produto de A por C) é definida pondo-se

(AC)v = A(Cv),

para todo v = (x, y) ∈ R^2. Assim, o transformado do vetor v pela transformação AC é o transformado do vetor Cv por A.

Vejamos qual é a matriz da composta AC. Para v = (x, y), temos:

$$\begin{aligned}(AC)v &= A(C(x, y)) = A(c_1x + d_1y,\ c_2 + d_2y)\\ &= (a_1(c_1x + d_1y) + b_1(c_2x + d_2y),\ a_2(c_1x + d_1y) + b_2(c_2x + d_2y))\\ &= ((a_1c_1 + b_1c_2)x + (a_1d_1 + b_1d_2)y,\ (a_2c_1 + b_2c_2)x + (a_2d_1 + b_2d_2)y).\end{aligned}$$

Logo a matriz de AC é

$$m = \begin{bmatrix} a_1c_1 + b_1c_2. & a_1d_1 + b_1d_1 \\ a_2c_1 + b_2c_2. & a_2d_1 + b_2d_2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada de produto das matrizes ***a*** e ***c***. Escreve-se ***m = ac***.

Observe que os elementos da matriz ac são obtidos tomando os produtos internos dos vetores-linha de a pelos vetores-coluna de c ordenadamente. Assim, por exemplo, o elemento de ac que está na segunda linha e primeira coluna é $a_2, c_1 + b_2, c_2$, produto interno do vetor (a_2, b_2), segunda linha de a, pelo vetor (c_1, c_2), primeira coluna de c.

Exemplo: Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de A × B.

Como A = A_{3x2} e B_{2x3}, o resultado é uma matriz 3 × 3, conforme calculado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 4+(-1)\cdot 4 & 1\cdot 2+(-1)(-5) & 1\cdot 3+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 4+2\cdot 4 & 2\cdot 2+2\cdot(-5) & 2\cdot 3+2\cdot 1 \\ 3\cdot 4+4\cdot 4 & 3\cdot 2+4\cdot(-5) & 3\cdot 3+4\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 16 & -6 & 8 \\ 28 & -14 & 13 \end{bmatrix}.$$

Determinante é um número real que se associa a uma matriz quadrada.

Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem.

Dada a matriz quadrada de 2ª ordem

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Chama-se determinante associado à matriz A (ou determinante de 2ª ordem) e o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo dos elementos da diagonal secundária.

Então, determinante de A.

Diagonal Principal — Diagonal secundária

$$A = (a_{11}.a_{22}) - (a_{12}.a_{21})$$

indica-se: $det\ A = |A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Exemplo 1:

Achar o valor do determinante $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ = 1.4 - 2.3 = 4 - 5 = -1

Resposta: -1

Exemplo 2:

Resolva a equação $\begin{pmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix}$ = 0.

Resolução:

$$\begin{pmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{5}(x+\boldsymbol{3}) - \boldsymbol{2}(x-\boldsymbol{1}) = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{5}x + \mathbf{15} - \mathbf{2}x + \mathbf{2} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{3}x = \mathbf{-17}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{17}{3}$$

$$S = \left\{-\frac{17}{3}\right\}$$

Determinante de uma matriz de 3ª ordem.

Método: ***- Pelo Teorema de Laplace:*** O determinante de uma matriz de 3ª ordem, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos respectivos cofatores.

$$\text{Det A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Consideramos a matriz quadrada de 3ª ordem:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

Define-se como determinante da matriz A o número:

$$\det A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Agrupando-se os termos que têm a_{11},a_{12} e a_{13}, isto é, os elementos da 1ª linha e colocando-os em evidência, vem:

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

det A = $a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) - a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$, em que:

det A = $a_{11}. \begin{pmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{pmatrix} - a_{12}. \begin{pmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{pmatrix} - a_{13}. \begin{pmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$, em que:

$\begin{pmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{pmatrix}$ = A_{11} é o cofator de a_{11}.

$-\begin{pmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{pmatrix}$ = A_{12} é o cofator de a_{12}.

$\begin{pmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{pmatrix}$ = A_{13} é o cofator de a_{13}.

Logo: **Det A =** $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

Exemplo: calcular o determinante da matriz A, sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Calcularemos o det A de duas formas:

a) Pelos elementos da 1ª linha: det A = $a_{11}A_{11}+ a_{12}A_{12}+ a_{13}A_{13}$.

$A_{11}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=14$ $\quad A_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=+30$ $\quad A_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=-24$

det A = 2(14) + (-1)(30) + 3(-24) ⇒ det A= 28-30-72 ⇒ **det A = -74**

b) Pelos elementos da 1ª coluna: det A **=** = $a_{11}A_{11}+ a_{21}A_{21}+ a_{31}A_{31}$.

$A_{11}=$ 14 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_{21}=$ = - 5 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $A_{31}=$ = - 17

det A = 2(14) + 0(-5) + 6(-17) ⇒ det A= 28 + 0 - 102 ⇒ **det A = -74**

Observe que para se aplicar esse método é melhor escolher a linha ou a coluna que tiver o maior número de **zeros**.

Regra de Sarrus

Podemos obter o determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem utilizando uma regra pratica muito simples denominada **regra de Sarrus.**

Seja a Matriz

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

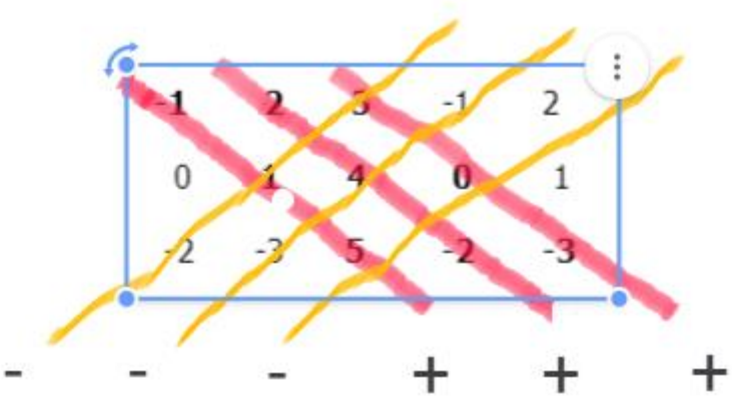
Vamos repetir a 1ª e a 2ª colunas à direita da matriz, conforme o esquema abaixo:

Multiplicando os termos entre si, seguindo os traços em diagonal e associando aos produtos o sinal indicado, temos:

det A = $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Exemplo: Calcular o determinante da matriz A, sendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$



det A = (-1)(1)(5) + (2)(4)(-2) + (3)(0)(-3) - (-2)(1)(3) - (-3)(4)(-1) - (5)(0)(2)

det A = -5 - 16 + 0 + 6 - 12 - 0

det A = - 27

Observação: Determinante de uma matriz quadrada de ordem n > 3. Para o cálculo desse determinante, aplicaremos o teorema de Laplace, até chegarmos a um determinante de 3ª ordem, e depois empregaremos a regra de Sarrus.

$$\textbf{Det A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Agora, faça estes exercícios para fixar o conhecimento, buscando uma aprendizagem significativa.

ATIVIDADES

1 – Em cada item, escreva a matriz conforme a lei de sua formação de seus elementos:

A) A = $(a_{ij})_{2x\,4}$ $tal\ que\ \ a_{ij} = 2i\ + j$

B) B=$(b_{ij})_{2x\,2}$ $tal\ que\ \ b_{ij} = \{i + j^2 se\ i\ \geq j; \quad ou\ \{\ j - 3i, se\ i\ < j$

2 – Dada a matriz B = b_{ij} de ordem 4 x 3, em que b_{ij} = i - j², calcule o elemento b_{41}.

3 – Observe a matriz e responda:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \\ 3 & 6 & 3 & 13 \\ 4 & 8 & 0 & 14 \\ 5 & 9 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

A) Qual é a ordem de A?
B) Escreva o elemento a_{52}.
C) Escreva a sua transposta [1].
D) Para que valores de i tem-se a_{ij}= 0?

[1] Matriz transposta: Se A é uma matriz de ordem m x n, denominamos a **transposta** de A a matriz de ordem n x m obtida pela troca de ordenada das linhas pelas colunas. Indica transposta de A por A^t.

4 – Calcule x e y, sabendo que $\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$..

5 – Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

A) A+B
B) A+C
C) B+C+A
D) A-B
E) A- B^t - C
F) Calcule o determinante de A, B e C.

6 – Calcule os determinantes das matrizes dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F: \begin{pmatrix} x+3 & 2 & 1 \\ x-1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Observação: o determinante de F é zero (0).

A) Determine pelo método do Teorema de Laplace:
B) Determine pelo método Regra de Sarrus.

7 – Calcule a multiplicação de um número real por uma matriz e calcule o determinante de cada matriz:

a) $5.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 10 & -8 \\ 20 & 6 & -6 \\ -2 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

8 – Efetuar as multiplicações e calcular o determinante:

a) $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

SISTEMATIZANDO

Caro estudante, temos algumas atividades práticas desenvolvidas para possam resolver em seus cadernos e também realizar uma prática de atividades no laboratório de informática com o uso do Geogebra para que criem suas próprias matrizes e possam visualizar como realizamos as operações no Geogebra.

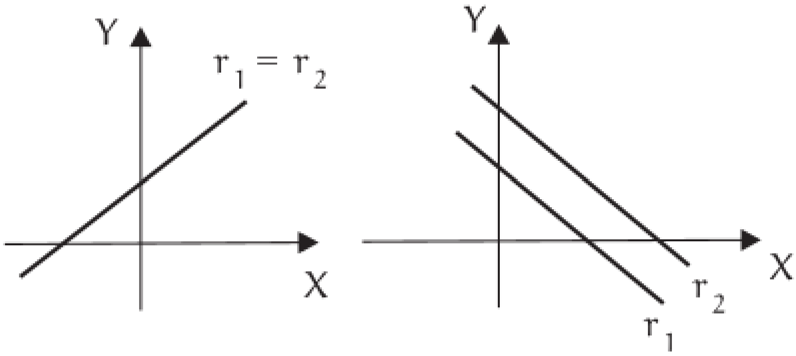
Vamos trabalhar com sistemas de equações lineares.

Uma solução do sistema linear

$$\begin{aligned} a1x + b1y &= c1 \\ a2x + b2y &= c2 \end{aligned} \qquad (*)$$

é um par $(x,y) \in R^2$ cujas coordenadas x,y satisfazem ambas equações. O sistema (*) se diz indeterminado, impossível ou determinado quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou uma única solução respectivamente. Como sabemos, cada equação em (*) tem como soluções as coordenadas (x,y) dos pontos de uma reta, de modo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, conforme as retas r1 e r2, representadas pelas duas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes respectivamente.

Figura 1: Sistemas com duas incógnitas: indeterminado, impossível e determinado. Gráficos das retas.



Fonte: (Elon Lages, 2014)

Para decidir em qual dessas três alternativas se enquadra o sistema (*), devemos examinar os quadros dos coeficientes

$$m = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{pmatrix}$$

Eles são exemplos de matrizes: *m* é uma matriz quadrada, com duas linhas e duas colunas, ou seja, uma matriz 2×2. Suas linhas são os vetores l1 = (a1,b1) e l2 = (a2,b2), e suas colunas são os vetores v = (a1,a2), w = (b1,b2), todos em R^2.

Duas retas que possuem mais de um ponto em comum devem coincidir. Logo o sistema (*) é indeterminado se, e somente se, suas equações definem a mesma reta.

O número a1.b2 − b1.a2 chama-se o determinante da $m = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix}$ matriz

do sistema.

Finalmente, o sistema (*) é *determinado* quando não é *indeterminado nem impossível*. Isto ocorre quando as retas a1x + b1y = c1 e a2x +b2y = c2 são *concorrentes*, ou seja, quando o determinante a1.b2 − a2.b1 é diferente de zero. Dito de outro modo: quando os vetores-linha ℓ1 = (a1, b1) e ℓ2 = (a2, b2) da matriz m não são múltiplos um do outro. Diz-se que um vetor w é combinação linear dos vetores u e v quando existem números x,y tais que w = xu + yv.

O sistema (*), que foi analisado acima sob o ponto de vista de suas linhas, pode também ser olhado em termos das colunas u = (a1, a2), v = (b1, b2), w = (c1, c2) de sua matriz aumentada. Sob este ângulo, afirmar que (x,y) é uma solução do sistema equivale a dizer que w = xu + yv. Portanto, o sistema possui solução se, e somente se, w é combinação linear dos vetores u e v.

Resulta, então, da discussão acima que se esses vetores u = (a1, a2) e v = (b1, b2) são tais que a

a1b2 − a2b1 ≠ 0 então qualquer vetor w = (c1, c2) em R² se exprime (de modo único) como combinação linear deles. Neste caso (isto é, quando u e v não são múltiplos um do outro) diz-se que os vetores u e v são *linearmente independentes*.

Dois sistemas dizem-se equivalentes quando admitem as mesmas soluções. Quando se substitui uma das equações do sistema pela soma desta equação com um múltiplo da outra, obtém-se um sistema equivalente. Noutras palavras, para todo k ∈ R, os dois sistemas abaixo possuem as mesmas soluções:

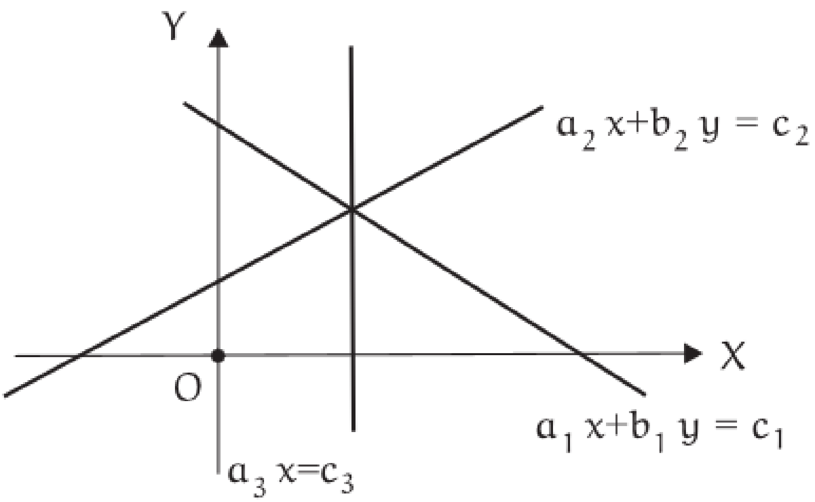
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y & = c_1 \\ (a_2 + ka_1)x + (b_2 + kb_1)y & = c_2 + kc_1. \end{cases}$$

Para resolver o sistema pelo *método da eliminação*, escolhe-se o número k de modo que um dos coeficientes a2 + ka1 ou b2 + kb1 seja *zero*. Isto dá imediatamente o valor de uma das incógnitas, o qual é substituído na primeira equação para encontrar o outro valor.

Sob o ponto de vista geométrico, quando a1b2 − a2b1 = 0 as retas a1x + b1y = c1 e a2x + b2y = c2 se cortam num certo ponto (x0, y0).

Para qualquer número k, pondo a3 = a1 + ka2 , b3 = b1 + kb2 e c3 = c1 + kc2 , a reta a3x + b3y = c3 ainda passa pelo ponto (x0 ,y0). Escolher k de modo a anular um dos coeficientes a3 ou b3 equivale a obter a reta a3x + b3y = c3 horizontal ou vertical, o que permite determinar imediatamente uma das coordenadas x0 ou y0 .

Figura 2. Método de eliminação visto geometricamente.



Fonte: (Elon Lages, 2014)

ATIVIDADES

1 – Resolva o seguinte sistema linear utilizando o método da eliminação gaussiana:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ -x + y + 2z = 7 \\ x + 2y - 5z = -10 \end{cases}$$

2 – Resolva o sistema.

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$$

3 – Uma liga L_1 contém 30% de ouro e 70% de prata e uma liga L_2 tem 60% de ouro e 40% de prata. Quantos gramas de cada uma deve-se tomar a fim de formar 100 gramas de uma liga com igual quantidade de ouro e prata?

	L_1	L_2	L_3
ouro	30%	40%	80%
prata	70%	60%	20%

4 – O sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{cases}$$

apresenta $L_1 = L_2$ mas $L_3 = (3, 6, 1)$ não é múltiplo de $L_1 = (1, 2, -1)$, logo a interseção $L_3 \cap L_1$ é a reta r, formada pelos pontos P = (x, y, z) cujas coordenadas são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2y - z = 3 - x \\ 6y + z = 9 - 3x \end{cases}$$

5- Escreva duas soluções diferentes para as equações lineares indicadas em cada item, e em seguida represente graficamente todas as soluções.

A) $2x + y = 1$.
B) $2y - x = -1$.
C) $3x + 4y = 6$.

6- Luan foi a um terminal de caixa eletrônico sacar 100,00 reais. A tela desse terminal indicava disponibilidade apenas de cédulas de R$50,00, R$20,00 e R$10,00 para Saque.

A) Escreva uma equação linear que expressa a quantidade de m, n e p de cédulas nesse terminal que Luan pode sacar?
B) Indique uma solução de equação que você escreveu no item anterior e faça interpretação dela em relação a situação-problema apresentada.
C) De quantas maneiras distintas Luan pode receber as cédulas nesse saque? Explique os procedimentos que você utilizou para resolver essa questão.

REFERÊNCIAS

GIOVANNI, J.R.; Bonjorno, J.R.; Jr Giovanni, J.R. **Matemática Fundamental**: 2º Grau - Volume Único - São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, G. & Hazzan, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 4:** Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. 2ª ed.- São Paulo: Atual Editora, 1977.

LIMA, Elon L. Geometria analítica e álgebra linear / Elon Lages Lima. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: Ensino Médio. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2023. Disponível em: https://www2.educacao.mg.gov.br/images/documentos/Curr%C3%ADculo%20Refer%C3%AAncia%20do%20Ensino%20M%C3%A9dio.pdf. Acesso em: 28 out 2023.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso:** ensino médio. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2024. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg. Acesso em: 28 out 2023.

SOUZA, Joamir Roberto de; **Multiversos Matemática:** Matemática Financeira, Gráficos e Sistemas. Volume 4. Ensino Médio – 1° ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.