PCM1 : Trigonométrie.

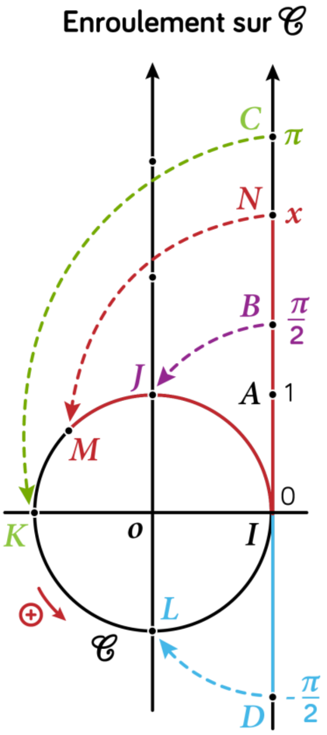
I/ Cercle trigonométrique et radians.

Définition du cercle trigonométrique.

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, sur lequel on défini le sens positif de parcours comme étant le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Nous pouvons donc calculer la circonférence de ce cercle :

$$C = 2\pi \mathrm{r} \quad \text{or} \quad \mathrm{r} = 1 \; donc \; C = 2\pi$$

On associe les nombres réels au point du cercle en enroulant la droite des réels sur le cercle. Comme sur le schéma ci-dessous.



Le point B est situé à une distance de $\frac{\pi}{2}$ de l'origine de la droite. On lui associe le point J de telle sorte que l'arc de cercle $\widehat{OJ}$ mesure $\frac{\pi}{2}$ de longueur.

Le point N est à une distance *x* de l'origine, le point M qui lui est associé est placé de manière à ce que la longueur de l'arc de cercle $\widehat{OM}$ soit de *x*.

Lorsque l'on enroule la droite des nombres réels sur le cercle trigonométrique tous les nombres espacés de 2π ou d'un multiple de 2π se retrouvent superposés.

Conversion degrés/ radians.

a) Définition du radian.

Le radian est une unité permettant de mesurer l'amplitude d'un angle. Un radian correspond à un angle dont la longueur de l'arc de cercle associé sur le cercle trigonométrique est de 1. Nous admettrons que la mesure des angles en radians et celles en degrés sont proportionnelles.

b) Angles remarquables.

A partir de la définition précédente, il est possible de retrouver facilement les mesures en radian de quelques angles remarquables. **Ce tableau est à retenir par cœur !**

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	180
Mesures en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Pour trouver les valeurs de ce tableau, nous nous sommes rappelé que les mesures des angles sont proportionnelles entre elles et que la longueur d'un demi-cercle est de π. Ensuite il suffit de diviser π et 180 par 2, 3, 4 et 6.

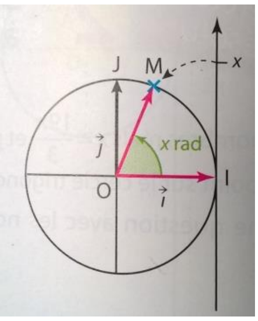
c) Méthode pour convertir.

La règle utilisée précédemment peut servir à convertir n'importe quel angle en degré en angle en radians. Ou inversement. Nous retiendrons la règle suivante :

> **Pour passer des degrés aux radians, il suffit de multiplier la mesure de l'angle par $\frac{\pi}{180}$**
>
> **Pour passer des radians aux degrés, il suffit de multiplier la mesure de l'angle par $\frac{180}{\pi}$**

Mesures et mesure principale.

a) Angles orientés.



Comme nous l'avons vu précédemment, le cercle trigonométrique est orienté. Ainsi dans la figure suivante, la longueur de l'arc de cercle reliant I à M est la même que celle reliant M à I. Cependant sur un cercle orienté. La valeur associée à la longueur de cet arc de cercle peut être positive (de I à M) ou négative (de M à I).
Ainsi nous définirons toujours les angles orientés de la manière suivante, quelque soit la position du point M :

Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique de centre O associé à x. On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{\imath}\,,\overrightarrow{OM})$

b) Mesure principale d'un angle.

Nous l'avons vu lorsque nous avons défini le cercle trigonométrique, tous les points espacés d'un multiple de 2π se retrouvent superposés sur le cercle. Donc toutes les mesures d'angles en radians, « espacées » de 2π, correspondent au même angle. Afin de simplifier les choses, par convention, on définit la mesure principale d'un angle orienté de vecteurs, la mesure de cet angle appartenant à l'intervalle [-π ; π]

Méthode 1 : pour déterminer la mesure principale d'un angle :

Pour déterminer la mesure principale α d'un angle orienté, dont on connait la mesure x il faut :

- Écrire que $\alpha = x + 2k\pi$ ou k est un nombre entier positif ou négatif ($k \in \mathbb{Z}$).
- On va déterminer la valeur de k en utilisant l'encadrement $-\pi \le \alpha \le \pi$.
- On calcule α en remplaçant k par sa valeur dans $\alpha = x + 2k\pi$.

Exemples :

$x = \frac{37\pi}{6}$	$x = \frac{26\pi}{3}$	$x = -\frac{11\pi}{6}$
Donc $\alpha = \frac{37\pi}{6} + 2k\pi$	Donc $\alpha = \frac{26\pi}{3} + 2k\pi$	Donc $\alpha = -\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$
$-\pi \le \frac{37\pi}{6} + 2k\pi \le \pi$ $-\pi - \frac{37\pi}{6} \le 2k\pi \le \pi - \frac{37\pi}{6}$ $\frac{-43\pi}{6} \le 2k\pi \le \frac{-31\pi}{6}$ $\frac{-43}{12} \le k \le \frac{-31}{12}$ $-3{,}6 \le k \le -2{,}6$ Or k est un entier donc k = - 3	$-\pi \le \frac{26\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ $-\pi - \frac{26\pi}{3} \le 2k\pi \le \pi - \frac{26\pi}{3}$ $\frac{-29\pi}{3} \le 2k\pi \le \frac{-23\pi}{3}$ $\frac{-29}{6} \le k \le \frac{-23}{6}$ $-4{,}8 \le k \le -3{,}8$ Or k est un entier donc k = - 4	$-\pi \le -\frac{11\pi}{6} + 2k\pi \le \pi$ $-\pi + \frac{11\pi}{6} \le 2k\pi \le \pi + \frac{11\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6} \le 2k\pi \le \frac{17\pi}{6}$ $\frac{5}{12} \le k \le \frac{17}{12}$ $0{,}4 \le k \le 1{,}4$ Or k est un entier donc k = 1
Calculons α : $\alpha = \frac{37\pi}{6} + 2 \times (-3) \times \pi$ $\alpha = \frac{37\pi}{6} - 6\pi$ $\alpha = \frac{37\pi}{6} - \frac{6\pi \times 6}{6}$ $\alpha = \frac{37\pi - 36\pi}{6}$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ Donc la mesure principale de l'angle est $\frac{\pi}{6}$.	Calculons α : $\alpha = \frac{26\pi}{3} + 2 \times (-4) \times \pi$ $\alpha = \frac{26\pi}{3} - 8\pi$ $\alpha = \frac{26\pi}{3} - \frac{8\pi \times 3}{3}$ $\alpha = \frac{26\pi - 24\pi}{3}$ $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ Donc la mesure principale de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$.	Calculons α : $\alpha = -\frac{11\pi}{6} + 2 \times (1) \times \pi$ $\alpha = -\frac{11\pi}{6} + 2\pi$ $\alpha = \frac{-11\pi}{6} + \frac{2\pi \times 6}{6}$ $\alpha = \frac{-11\pi + 12\pi}{6}$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ Donc la mesure principale de l'angle est $\frac{\pi}{6}$.

Méthode 2 :
L’objectif est de trouver combien de fois il y a 2π dans l’angle dont on cherche la mesure principale et de les enlever.
Pour cela on suit les étapes suivantes.

Etape 1 : Trouver le nombre de tours complets.	$\frac{-55\pi}{6}=\frac{-2\pi\times 6}{6}\times 4-\frac{7\pi}{6}$ $=\frac{-48\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{29\pi}{7}=\frac{2\pi\times 7}{7}\times 2+\frac{\pi}{7}$ $=\frac{14\pi}{7}+\frac{\pi}{7}$	$\frac{15\pi}{2}=\frac{2\pi\times 2}{2}\times 3+\frac{3\pi}{2}$ $=\frac{12\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}$
Etape 2 : Vérifier si le reste est une mesure principale	$\frac{-7\pi}{6}<-\pi$	$-\pi<+\frac{\pi}{7}<\pi$	$\pi<+\frac{3\pi}{2}$
	 On pourra retenir que lorsque le numérateur sans son signe, est supérieur au dénominateur la mesure obtenue n’est pas une mesure principale.		
Etape 3 : Ajouter ou retirer 2π si nécessaire	$\frac{-7\pi}{6}+2\pi=\frac{-7\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$	Aucun calcul à effectuer.	$\frac{3\pi}{2}-2\pi=\frac{-\pi}{2}$
Résultat :	La mesure principale de $\frac{-55\pi}{6}$ est : $\frac{5\pi}{6}$	La mesure principale de $\frac{29\pi}{7}$ est : $\frac{\pi}{7}$	La mesure principale de $\frac{12\pi}{2}$ est : $\frac{-\pi}{2}$