

# Spinnwebdiagramme

## Ein Konzept mit GeoGebra zu neuem Leben erweckt

**LERNGRUPPE:** ab 8. Klasse

**IDEE:** Iterationsschritte und Konvergenzverhalten in GeoGebra darstellen

**VORWISSEN:** Fixpunktiteration

**ARBEITSBLATT 1:** Einstiegsbeispiel

**ARBEITSBLATT 2:** Arbeiten mit Spinnwebdiagrammen

**MATERIAL:** GeoGebra-Applet  
<https://fr-vlg.de/ml239spinnweb>

**ZEITBEDARF:** 2 Doppelstunden

Spinnwebdiagramme als Veranschaulichung der Fixpunktiteration sind eigentlich ein bekanntes Konzept (z. B. Krebs 1981), allerdings ist ihre Erstellung per Hand viel zu mühsam. Heutzutage gibt es schöne und leicht handhabbare GeoGebra-Applets (etwa von Andreas Lindner, wofür ihm herzlich gedankt sei: <https://fr-vlg.de/ml239spinnweb>). Diese eröffnen didaktisch neue Möglichkeiten.

Einerseits kann mit Spinnwebdiagrammen (s. **Abb. 1**) eine Möglichkeit des näherungsweisen Lösens von

Gleichungen (die Fixpunktiteration) gut veranschaulicht werden, ohne viel Theorie vorschalten zu müssen: Man sieht unmittelbar, ob ein Fixpunkt *anziehend* oder *abstoßend* ist. Andererseits können auch theoretische Begründungen der Konvergenz bzw. Divergenz im Fall linearer Funktionen angedacht werden, insbesondere im Wahlpflichtbereich.

### Gleichungen näherungsweise lösen

Bei der Einstiegsaufgabe (s. **Arbeitsblatt**) geht es darum herauszufinden, welcher Anteil eines schwimmenden Holzstamms aus dem Wasser ragt. Als zu lösende Gleichung ergibt sich Holzmasse = Masse des verdrängten Wassers

$$\pi R^2 \cdot L \cdot 0,7 = [\pi R^2 - \frac{1}{2} R^2(x - \sin(x))] \cdot L \cdot 1$$

Vereinfacht erhalten wir schließlich  $x = 0,6 \pi + \sin(x)$  und erkennen, dass es nicht auf die Länge ankommt und – sofern nur der herausragende Anteil interessiert – auch nicht auf den Radius. Aber diese Gleichung kann man nicht geschlossen lösen, sondern nur näherungsweise.

Das könnte GeoGebra einerseits durch den Befehl „NLöse“ bewerkstelligen, andererseits bietet so eine Gleichung den Anlass, das näherungsweise Lösen von Gleichungen im Unterricht explizit zu thematisieren, nicht nur als einen CAS-Befehl, dessen Funktionsweise man nicht nachvollziehen kann („black box“). Eine Möglichkeit stellt die Fixpunktiteration veranschaulicht durch Spinnwebdiagramme dar.

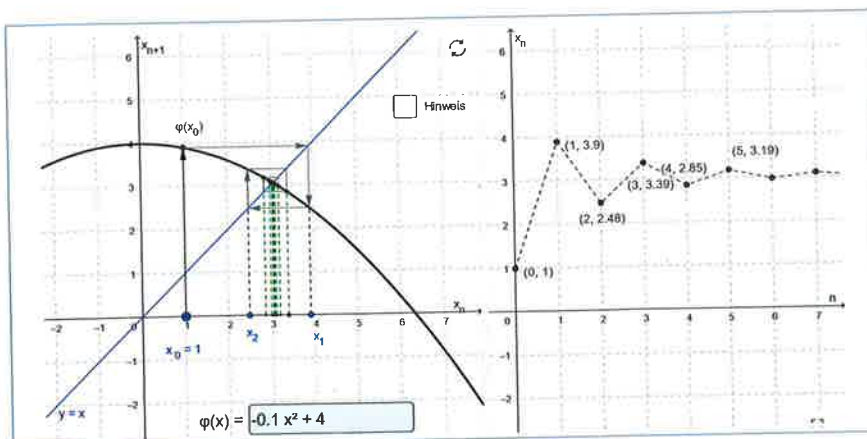
$x^*$  heißt Fixpunkt einer Funktion  $\varphi$ , wenn die Anwendung von  $\varphi$  diesen Wert nicht ändert, d. h.,  $\varphi(x^*) = x^*$  gilt; Fixpunkte sind bei gewöhnlichen Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  also keine Punkte im geometrischen Sinn mit 2 Koordinaten, sondern eigentlich Stellen (Argumente) auf der  $x$ -Achse.

Dieses Prinzip wird primär auf einer experimentellen Ebene erarbeitet, entweder jetzt als Exkurs oder bereits vorher, sodass es hier schon zur Verfügung steht. Eine Möglichkeit dazu ist im folgenden Abschnitt dargestellt.

### Das Prinzip der Spinnwebdiagramme

Spinnwebdiagramme illustrieren gut, wie man zum Fixpunkt  $x^*$  einer Funktion  $\varphi$  kommen kann, indem man ausgehend von einem Startwert  $x_0$  fortwährend die Funktion  $\varphi$  iteriert, d. h., sie ständig auf die Ergebnisse anwendet:

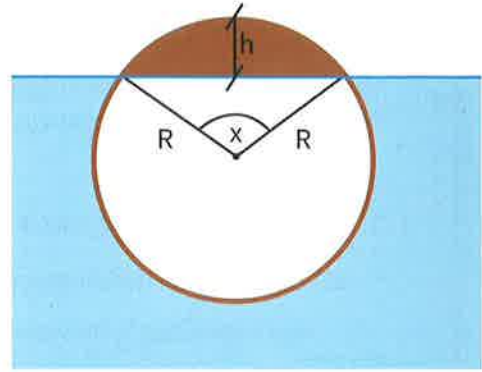
$$\begin{aligned} x_0 &\xrightarrow{\varphi} \varphi(x_0) = x_1 \xrightarrow{\varphi} \varphi(x_1) \\ &= x_2 \xrightarrow{\varphi} \varphi(x_2) = x_3 \xrightarrow{\varphi} \varphi(x_3) \\ &\dots \xrightarrow{\varphi} x^* \end{aligned}$$



**Abb. 1:** (Positiver) Fixpunkt der Funktion  $\varphi$  mit  $\varphi(x) = -0,1x^2 + 4$  und  $x_0 = 1$

## Einstiegsaufgabe

Welcher Prozentsatz des Radius ragt bei einem im Wasser schwimmenden drehzylindrischen Holzstamm (Radius  $R$ , Länge  $L$ : kommt es auf diese an?) mit einer Dichte von  $\rho = 0,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  aus dem Wasser heraus? Wegen  $\rho > 0,5$  taucht der Stamm mehr als zur Hälfte ins Wasser ein (s. Bild).



**Bild:** Schwimmender Holzstamm im Querschnitt

### Hinweise zum Lösungsansatz:

1.  $A_{\text{Segment}} = A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Dreieck}}$
2. Es ist  $x$  der Öffnungswinkel (Zentriwinkel, im *Bogenmaß!*) jenes Kreissegments im Querschnittsbild, das sich „über Wasser“ befindet (siehe Bild, braune Fläche). Dann beträgt der Flächeninhalt dieses Kreissegments:  

$$A = \frac{R^2}{2} \cdot (x - \sin(x)).$$
3. Schwimmen bedeutet, dass die Masse (bzw. die Gewichtskraft) des Stammes gleich der Masse (bzw. der Gewichtskraft) des verdrängten Wassers ist.
4. Masse = Volumen  $\cdot$  Dichte
5. Stelle eine Gleichung für  $x$  auf.

In vielen Fällen konvergiert dieses Verfahren (die Folge der  $x_i$ ) zum gesuchten Fixpunkt  $x^*$  (die Frage, in welchen Fällen das funktioniert, ist nicht so leicht zu beantworten, siehe unten). Es ist ein Iterationsverfahren, daher wird dadurch die für die numerische Mathematik zentrale Idee Iteration angesprochen und realisiert.

Weil also in jedem Schritt sozusagen der erhaltene Funktionswert  $y$  zum neuen Eingabewert  $x$  wird, interessiert man sich graphisch gesehen also für den Schnittpunkt des Graphen der Funktion  $\varphi$  mit der 1. Winkelhalbierenden ( $y = x$ , s. **Abb. 1**, links).

Bereits mit einem einfachen Taschenrechner kann man das erleben, indem man ihn auf „Bogenmaß (Radiant)“ einstellt und so oft hintereinander auf die  $\cos$ -Taste drückt, bis sich der Wert nicht mehr ändert:  $\approx 0,739$ .

Was geschieht hierbei? Der Startwert ist bei  $x_0 = 1$ , dann geht man senkrecht zum Funktionsgraphen (das heißt, man wendet die Funktion  $\varphi$  an) und dann waagrecht zur ersten

Winkelhalbierenden (bei ihren Punkten gilt  $y = x$ , d. h. sowohl die  $x$ - als auch die  $y$ -Koordinate dieses Punktes sind  $x_1 = \varphi(x_0)$ ). Für den nächsten Iterationswert  $x_2 = \varphi(x_1)$  braucht man also wieder nur senkrecht zum Funktionsgraphen zu gehen, dann wieder waagrecht zur ersten Winkelhalbierenden usw. Es entsteht hier eine Einwärtsspirale zum gesuchten Punkt ( $x^* | x^*$ ). Dies sieht ein wenig aus wie Spinnweben (daher der Name solcher Diagramme).

Zusätzlich zur linken Darstellung sind rechts die Punkte  $(n | x_n)$  dargestellt, wobei auch hier die oszillierende Konvergenz (die Werte sind abwechselnd zu klein bzw. zu groß) gut zu sehen ist. Passenderweise ist die Skalierung der vertikalen Achse links und rechts gleich, so dass  $x^*$  in beiden Diagrammen „auf gleicher Höhe“ liegt. Die Koordinaten der ersten sechs Punkte sind angegeben, mit der rechten Maustaste kann man auch jene der weiteren Punkte anzeigen lassen, wenn auch der genauere Wert von  $x^*$  interessiert. Aus Platzgründen wird diese rechte

Bildhälfte in weiterer Folge meist weggelassen.

Bei obigem Beispiel wären mögliche Fixpunkte von  $\varphi$  auch durch Lösen der quadratischen Gleichung  $\varphi(x) = x$  bzw.  $-0,1 \cdot x^2 + 4 = x$  zu finden gewesen, aber bei allgemeineren Gleichungen der Art  $\varphi(x) = x$  geht das nicht immer so einfach. Die dahintersteckende Theorie (welche Bedingung muss die Funktion  $\varphi$  erfüllen, damit dieses iterative Anwenden von  $\varphi$  zu einem Fixpunkt konvergiert?) wird durch *kontrahierende Abbildungen* und den *Banach'schen Fixpunktsatz* beschrieben (vgl. Schuppar/Humenberger 2015, S. 267 f.), aber diese sind im Allgemeinen zu kompliziert für den Regelunterricht in der Schule.

### Aufgaben zur Erkundung

An dieser Stelle können Lernende selbst einige Beispiele als Iterationsfunktion  $\varphi$  probieren und einfach beobachten, ob das „Verfahren klappt“.

# Gleichungen lösen mit Spinnwebdiagrammen

Verwende für die folgenden Aufgaben das GeoGebra-Applet auf <https://www.geogebra.org/m/vujzqbq4>.



## 1. Spinnwebdiagramme, Gleichungen

- a) Löse mit dem Iterationsverfahren die Gleichung  $x = \frac{1}{2}(\sin(x) + 1)$  und stelle in dem GeoGebra-Applet das zugehörige Spinnwebdiagramm dar. Hinweis:  $\varphi(x) := \frac{1}{2}(\sin(x) + 1)$ , löse also  $\varphi(x) = x$ .
- b) Was beobachtest du, wenn du dasselbe bei  $x = 5 \cdot (\sin(x) + 1)$  probierst? Wie viele Lösungen hat diese Gleichung? Kann man diesen Lösungen mit der einfachen Iteration der Funktion  $\varphi_1(x) := 5 \cdot (\sin(x) + 1)$  näherkommen? Wenn nein, woran kann man das erkennen?

## 2. Anziehende und abstoßende Fixpunkte

Begründe: Die Gleichung  $x = 5 \cdot (\sin(x) + 1)$  ( $=: \varphi_1(x)$ ) ist äquivalent zu  $x = \sin(x) + \frac{4}{5} \cdot x + 1$  ( $=: \varphi_2(x)$ ).

Arbeite wieder mit einem Spinnwebdiagramm im GeoGebra-Applet und bestimme Näherungswerte für anziehende Fixpunkte. Wie viele sind das? Kannst du eine Vermutung äußern, bei welchen Startwerten  $x_0$  das Iterieren von  $\varphi_2$  zu welchem Fixpunkt führt? (*Einzugsbereiche* der jeweiligen Fixpunkte)

Hinweis: Es gibt hier auch einen abstoßenden Fixpunkt, den man so nicht in den Griff bekommt, aber er scheint eine Rolle zu spielen für die Einzugsbereiche der anziehenden Fixpunkte.

## 3. Heron-Verfahren

Erstelle für 3 verschiedene Werte von  $a > 0$  das Spinnwebdiagramm zur Iterationsfunktion

$\varphi_a(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{a}{x})$  für  $x > 0$  und passende Startwerte. Was beobachtest du graphisch: Ist der Fixpunkt anziehend oder abstoßend? Bei welchem Wert liegt der Fixpunkt jeweils? Bestätige das auch rein algebraisch. Kann man hier Startwerte  $x_0 > 0$  finden, die bei  $\varphi_a$ -Iteration nicht zum Fixpunkt führen?

## 4. Nullstellen eines Polynoms 3. Grades

Die Polynomgleichung 3. Grades  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 2 = 0$  soll mit dem Iterationsverfahren gelöst werden.

Dazu muss diese Gleichung zunächst einmal in die Form  $\varphi(x) = x$  umgewandelt werden.

Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, zum Beispiel:

$$\varphi_1(x) = \frac{2}{x \cdot (4-x)} \quad \varphi_2(x) = 4 - \frac{2}{x^2} \quad \varphi_3(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2 \quad \varphi_4(x) = \frac{x^3 + 2}{4x}$$

**Begründe:** Fixpunkte der Funktionen  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sind genau die Nullstellen der Polynomfunktion  $p$ . Verwende das GeoGebra-Applet und finde experimentell heraus, welche Fixpunkte jeweils anziehend bzw. abstoßend sind. Lies im Fall anziehender Fixpunkte jeweils Näherungswerte ab und gib ihre jeweiligen *Einzugsbereiche* experimentell an. Sollte ein Fixpunkt bei allen vier Iterationsfunktionen abstoßend sein, finde eine Möglichkeit, auch diesen durch  $\varphi$ -Iteration und Darstellung durch ein Spinnwebdiagramm näherungsweise herauszufinden (ganz andere Iterations- oder Umkehrfunktion).

## 5. Schwimmende Holzkugel

Welcher Prozentsatz des Radius ragt bei einer im Wasser schwimmenden Holzkugel (Radius  $R$ ) mit einer Dichte von  $\rho = 0,7 \text{ g/cm}^3$  aus dem Wasser heraus? Wegen  $\rho > 0,5$  taucht die Kugel mehr als zur Hälfte ins Wasser ein. Stelle eine Gleichung auf (wähle einen konkreten Wert von  $R$ , Variable  $h$ ; oder dividiere die entstehende Gleichung in  $R$  und  $h$  durch  $R^3$ , sodass du eine Gleichung in  $x := h/R$  erhältst) und löse diese mit dem Iterationsverfahren (Spinnwebdiagramme).

Hinweise:

- Das Volumen eines Kugelsegmentes mit Höhe  $h$  (Kugelradius  $R$ ) ist gegeben durch  $V_{\text{Kugelsegment}} = \pi/3 \cdot h^2 \cdot (3R - h)$
- Achte darauf, ob du mit  $h$  die Höhe des Kugelsegments *unter* oder *über* Wasser bezeichnest (beides ist möglich).
- Lösung: ca. 73 %

Was ist hier mit „nicht klappen“ gemeint? Man wird durch Probieren relativ rasch Beispiele finden, bei denen das Verfahren nicht zum Ziel führt, wenn nämlich der Funktionsgraph von  $\varphi$  beim Fixpunkt  $x^*$  relativ steil verläuft (mit einer Steigung  $< -1$  oder  $> 1$ ), dann ergeben sich im Bild *Auswärtsspiralen* bzw. *Auswärtstreppen*, und man kommt mit der  $\varphi$ -Iteration dem Fixpunkt nicht näher, sondern immer weiter weg von diesem (**Abb. 2**, der Fixpunkt heißt dann *abstoßend*).

Weitere Experimente mit verschiedenen Funktionen legen die Vermutung nahe, dass das Verfahren dann besonders gut (also schnell) funktionieren wird – das heißt, sich dem gesuchten Fixpunkt annähert –, wenn der Graph von  $\varphi$  die erste Winkelhalbierende ziemlich flach schneidet (also mit einer betragsmäßig sehr kleinen Steigung).

So kann man dieses Prinzip zum *näherungsweise iterativen Lösen von Gleichungen* anwenden, indem man sie auf die Form  $\varphi(x) = x$  bringt und graphisch überprüft, ob der Graph von  $\varphi$  bei  $x^*$  flach oder steil verläuft. Wenn er dort flach verläuft (Steigung betragsmäßig kleiner als 1), funktioniert das Iterationsverfahren bei *geeigneten* Startwerten, und die Veranschaulichung mit Spinnwebdiagrammen kann gute Dienste leisten. (Was hier genau geeignet bedeutet, könnte einerseits Gegenstand weiterer theoretischer Untersuchungen sein, aber man kann das auch auf einer rein experimentellen Ebene betrachten: Als Einzugsbereich eines anziehenden Fixpunktes  $x^*$  soll hier die Menge der möglichen Startwerte  $x_0$  bezeichnet werden, die bei  $\varphi$ -Iteration zu  $x^*$  führen; das kann ganz  $\mathbb{R}$  sein, möglicherweise aber auch nur ein kleines Intervall.)

Dieses Wissen bzw. dieses Prinzip können also breit angewandt werden, wodurch eine Grundlage für vertieftes numerisches Denken gelegt ist. Dabei muss noch gar kein präziser Konvergenzbegriff vorliegen, die Arbeit kann mit geeigneten Applets schon wesentlich früher und primär auf der graphischen und experimentellen Ebene geschehen. Begründungen und theoretische Betrachtungen können zu diesem

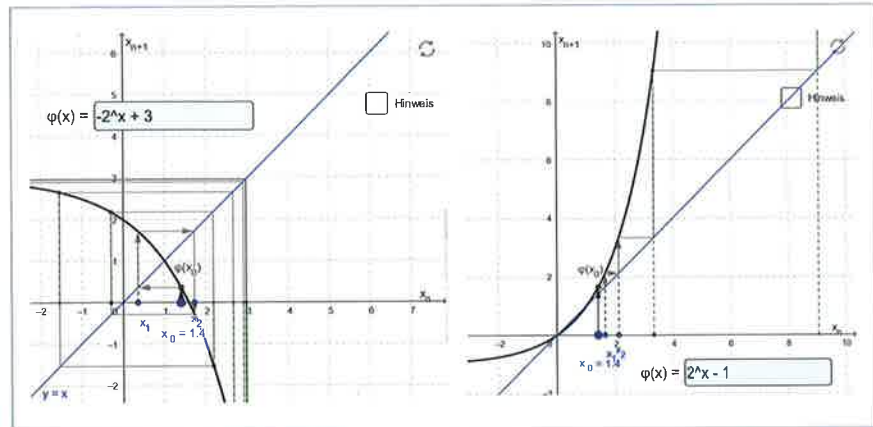


Abb. 2: Auswärtsspirale und Auswärtstreppe

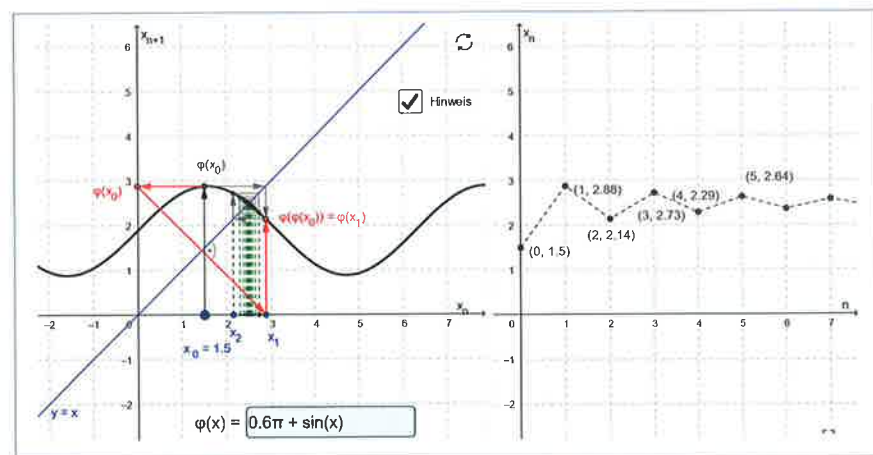


Abb. 3: Der Fixpunkt der Funktion  $\varphi$  mit  $\varphi(x) = 0,6\pi$  liegt bei  $x^* \approx 2,49$

Zeitpunkt noch weitgehend außen vor bleiben.

### Zurück zur Einstiegsaufgabe

Mit dem angesprochenen Applet kann man auch die Gleichung  $x = 0,6\pi + \sin(x)$  der Einstiegsaufgabe (s. **Arbeitsblatt**) näherungsweise lösen und diese Lösung graphisch veranschaulichen (**Abb. 3**,  $x_0 = 1,5$ ).

Durch Anklicken des Kästchens „Hinweis“ (**Abb. 3**) wird mit roten Pfeilen klar, dass  $x_1 = \varphi(x_0)$  sowohl auf der senkrechten Achse und mithilfe der ersten Winkelhalbierenden eben auch auf der waagerechten Achse abzulesen ist, dies erklärt noch mal, wie bzw. warum Spinnwebdiagramme geeignet sind, das iterierte Anwenden einer Funktion zu veranschaulichen. Für Lernende, die erstmals mit dem Prinzip von Spinnwebdiagrammen

konfrontiert werden, ist das nämlich oft gar nicht so selbstverständlich, und es bedarf für echtes Verstehen oft einiger Anstrengung.

Fixpunkte, bei denen das Iterationsverfahren konvergiert, nennt man in naheliegender Weise auch *anziehend*, weil man eben mit der  $\varphi$ -Iteration beliebig nahe zum Fixpunkt kommt. Es sollte damit unmittelbar klar sein, dass dieses *Fixpunktverfahren* eine Möglichkeit ist, *eine große Klasse von Gleichungen näherungsweise zu lösen*, indem man sie auf die Form  $\varphi(x) = x$  umformt, und es daher ein breit einsetzbares Verfahren zum Lösen von Gleichungen ist.

Fixpunktiterationen bzw. -verfahren sind immer nach folgendem Prinzip konstruiert:  $x^*$  ist Lösung des Ursprungsproblems (meist Nullstelle einer Funktion)  $\Leftrightarrow x^*$  ist Fixpunkt von  $\varphi$ .

Für dieses Umformen gibt es natürlich mehrere Möglichkeiten (vgl. **Arbeitsblatt 2**).

Jedenfalls kann man mit dieser Lösung  $x^*$  die gefragte „Höhe“  $h$  (Bild 1 auf **Arbeitsblatt 1**) bestimmen:

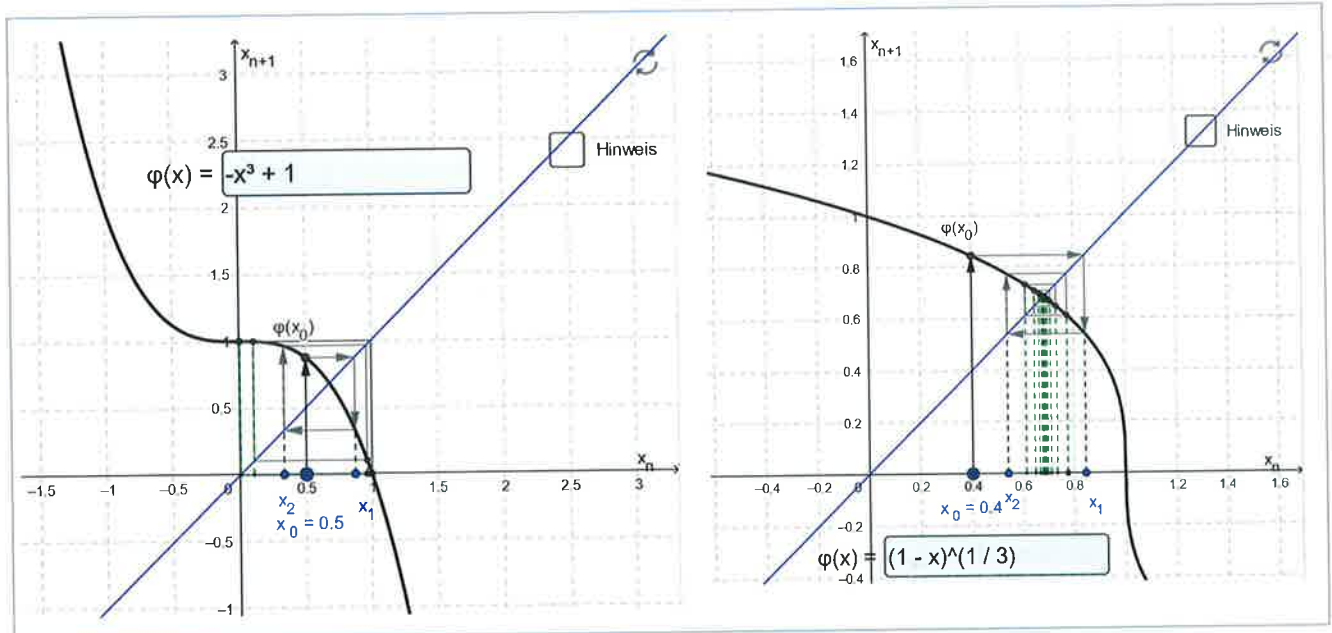
$h = R - R \cdot \cos(x^*/2) = R \cdot (1 - \cos(x^*/2))$ ,  
und da der Prozentsatz von  $R$  gefragt ist, läuft die Lösung der Einstiegsauf-

gabe auf die Bestimmung des Faktors  $(1 - \cos(x^*/2)) \approx 0,68$  hinaus, nämlich ca. 68 % (unabhängig von  $R$ ).

## Umkehrfunktionen

Bei diesem Thema könnte auch ein hier wichtiger Zusammenhang zu

Umkehrfunktionen angesprochen werden: Graphen von Umkehrfunktionen sind ja spiegelbildlich zur ersten Winkelhalbierenden  $y = x$ . Jede Funktion  $\varphi$  hat einerseits dieselben Fixpunkte wie ihre Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$ , und andererseits bedeutet dies: Wenn ein Fixpunkt  $x^*$  bzgl. einer Funktion  $\varphi$  abstoßend ist (steiler Schnitt mit  $y = x$ ), dann



**Abb. 4:** Der links abstoßende Fixpunkt  $x^* \approx 0,69$  ( $\varphi(x) = -x^3 + 1$ , Auswärtsspirale, steiler Schnitt mit  $y = x$ ) ist rechts anziehend ( $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x}$ , Einwärtsspirale, flacher Schnitt mit  $y = x$ )

## Mathe Welt: Die Kreiszahl $\pi$



Lerngruppe: 8. – 9. Klasse

Kreisberechnungen im Unterricht ... was bleibt davon? – Der Umfang ist ungefähr dreimal so groß wie der Durchmesser ... wir können diesen Faktor genauer angeben, der Faktor hat unendlich viele Nachkommastellen, wir rechnen mit dem Taschenrechner, tippen auf den bisher unbekannt griechischen Buchstaben

$\pi$  oder einfach nur 3,14. Für viele Menschen ist Pi dann eben auch genau das: 3,14. Und meistens reicht das.

Allerdings: Auf dem Weg dorthin wird ganz eigene, besondere Mathematik neu entdeckt und genutzt – das wird leicht vergessen.

Der Entdeckungsreise zur Kreiszahl Pi möchten wir deshalb hier einen Rahmen und einen Raum geben, der die

Zusammenhänge des Prozesses miteinander verknüpft und einen Blick auf das Gesamtbild ermöglicht.

Ausgangspunkt ist die Vorstellung vom Messen und die Idee von Umfang und Flächeninhalt. Dann kann es auch schon losgehen auf dieser Entdeckungsreise, entlang konkreter Fragestellungen und historischer Entwicklungen bis hin zu kosmischen Weiten und unbequemen Ungenauigkeiten.

Wie auf jeder Reise können wir dabei viel Neues kennenlernen – Messverfahren und Näherungsprozesse, die Frage „Wie genau muss etwas sein?“ und eine mögliche Antwort darauf. Und eben auch die besondere Unfassbarkeit der Zahl Pi.

Diese MatheWelt eignet sich im Unterricht auch für den Einsatz als Wochenplan. Je nach Leistungsstärke des Kurses kann dafür etwas mehr Zeit eingeplant werden. Bei der Bearbeitung der Aufgaben werden sowohl mobile Endgeräte und Apps als auch klassische Messwerkzeuge genutzt sowie ausreichend viele runde Objekte, die vermessen werden.

Karl Charon, Meike Maas und Wilfried Herget

ist er bzgl. der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  anziehend (flacher Schnitt mit  $y = x$ ), der Fixpunkt  $x^*$  bleibt ja beim Spiegeln an  $y = x$  unverändert. In so einem Fall kann man also die Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  zum Lösen der Gleichung  $\varphi(x) = x$  bzw. eben gleichwertig  $\varphi^{-1}(x) = x$  verwenden (Abb. 4).

### Aufgaben für Lernende

Hier sind einerseits graphische Experimente sinnvoll (Wie steil schneidet der Graph von  $\varphi$  bzw.  $\varphi^{-1}$  die erste Winkelhalbierende  $y = x$ ? Startwert im GeoGebra-Applet so wählen, dass das Verfahren anschaulich konvergiert, ohne weitere theoretische Überlegungen oder Begründungen) und andererseits das algebraische bzw. graphische Bestimmen von Umkehrfunktionen mittels GeoGebra.

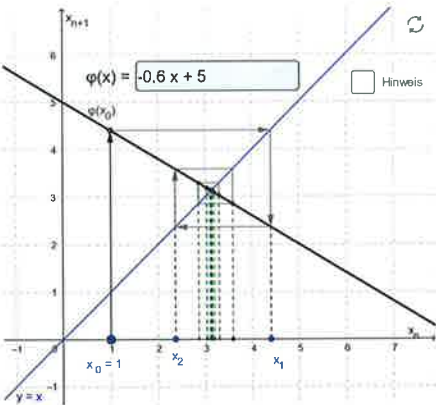
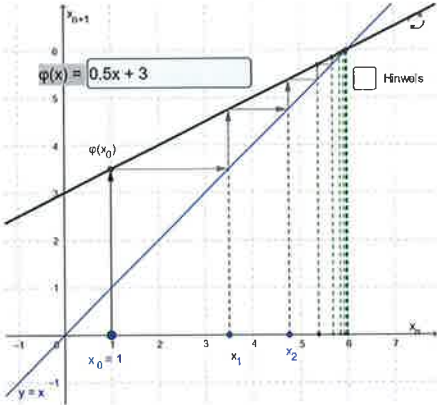
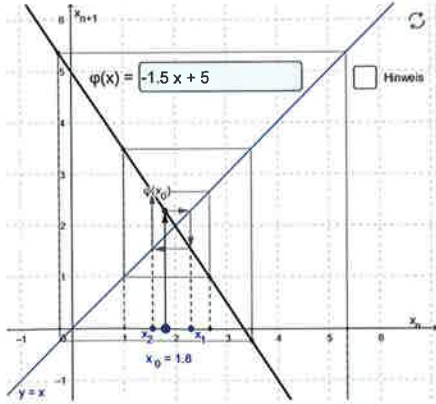
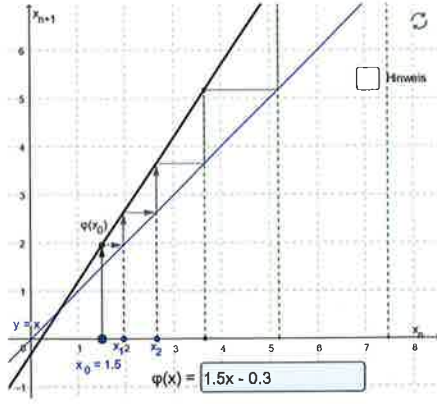
Anschließend das Verwenden von Umkehrfunktionen, um abstoßende Fixpunkte anziehend zu machen (Abb. 4). Eine Alternative zu Umkehrfunktionen im Fall eines abstoßenden Fixpunkts bei  $\varphi_1(x) = x$  ist, die Gleichung auf eine andere Fixpunktgleichung  $\varphi_2(x) = x$  umzuformen und zu hoffen, dass der entsprechende Fixpunkt nun anziehend ist (vgl. Arbeitsblatt 2). Hierbei wird insgesamt das Prinzip von Spinnwebdiagrammen und ein GeoGebra-Applet als passendes Werkzeug genutzt, wobei der Fokus deutlich auf explorierendem Arbeiten, weniger auf formalen Aspekten liegt.

### Ausblick (Klasse 10)

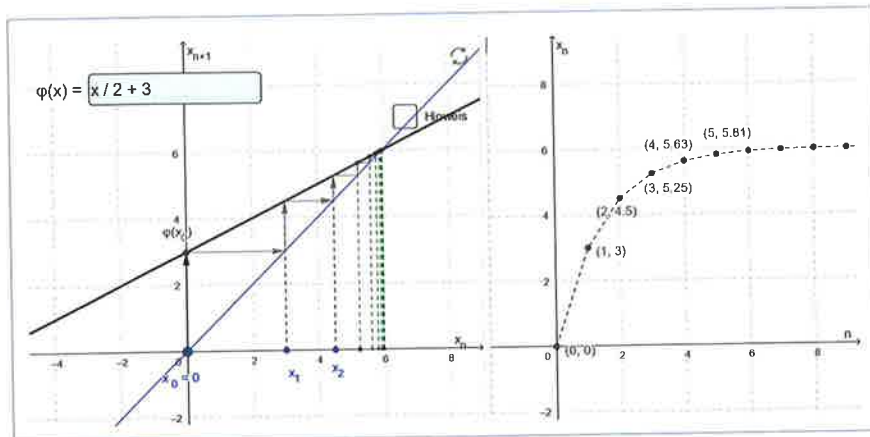
Am Beispiel linearer Funktionen sind theoretische Betrachtungen auch im Schulunterricht gut machbar (z. B. im

Wahlpflichtkurs). Wenn man sich dann noch vor Augen führt, dass durch die Ableitung eine Funktion lokal möglichst gut durch eine lineare Funktion approximiert wird (in der Funktionslupe erscheint dann der Funktionsgraph praktisch als Gerade), so sind die Ergebnisse in plausibler Weise direkt auf differenzierbare Funktionen zu übertragen, und damit ist man eigentlich schon beim Banach'schen Fixpunktsatz für den Spezialfall differenzierbarer Funktionen. Somit ist es möglich, den Banach'schen Fixpunktsatz im Schulunterricht plausibel zu machen, ohne viel Theorie und strengere Beweise.

Andererseits, und das ist hier vielleicht der wichtigere Aspekt, werden die empirischen Beobachtungen des letzten Abschnittes (anziehender [abstoßender] Fixpunkt, d. h. Konvergenz [Divergenz], bei Steigung des Graphen

	oszillierend	monoton
$x^*$ anziehend $ \Delta_n  \rightarrow 0$	$-1 < m < 0$ Einwärtsspirale 	$0 < m < 1$ Einwärtstreppe 
$x^*$ abstoßend $ \Delta_n  \rightarrow \infty$	$m < -1$ Auswärtsspirale 	$m > 1$ Auswärtstreppe 

Tab. 1: Vier Hauptfälle für Spinnwebdiagramme bei linearen Funktionen



**Abb. 5:** Die vertikalen Sprunghöhen und – vor allem – die vertikalen Abstände zum Wert 6 halbieren sich jeweils von Schritt zu Schritt

von  $\varphi$  bei  $x^*$  betraglich kleiner [größer] als 1) dadurch bestätigt und für eine einfache Funktionenklasse auch begründet.

Um keinen falschen Eindruck zu erwecken, sollte man im Unterricht deutlich hervorheben und betonen: Zum Schneiden von Geraden braucht man keine Spinnwebdiagramme; aber die linearen Funktionen bieten einerseits einfache Übungs- und Veranschaulichungsmöglichkeiten und sind andererseits hinreichend einfach für den Schulunterricht, sodass bei ihnen auch Begründungen von Konvergenzen bzw. Divergenzen (geometrische Folgen, 10. Schulstufe) eine Rolle spielen können.

Man kann bei linearen Funktionen leicht sehen und begründen, und das ist dann eben auch übertragbar auf allgemeinere (differenzierbare) Funktionen:

- Für  $|m| < 1$  konvergiert die  $\varphi$ -Iteration bei einer linearen Funktion  $\varphi$  mit  $\varphi(x) = mx + b$  zum Fixpunkt  $x^*$  (anziehender Fixpunkt; Einwärtstreppe bei  $0 < m < 1$ , Einwärtsspirale bei  $-1 < m < 0$ ).
- Für  $|m| > 1$  divergiert die  $\varphi$ -Iteration bei einer linearen Funktion  $\varphi$  mit  $\varphi(x) = mx + b$  (abstoßender Fixpunkt; Auswärtstreppe bei  $m > 1$ , Auswärtsspirale bei  $m < -1$ ).

Wenn man wissen will, wie schnell die  $\varphi$ -Iteration bei linearen Funktionen  $\varphi$  zum Fixpunkt  $x^*$  führt, dann wird man sich für die Abstände zu  $x^*$  interessieren. Und dieser Fokus hat den Vorteil, dass man nicht viele Fallunterscheidungen machen muss.

Um das anzubahnen, könnten und sollten im Schulunterricht vor den allgemeinen algebraischen Betrachtungen mit allgemeinen Parametern  $m, b$  bei linearen Funktionen auch konkrete Beispiele untersucht werden, zum Beispiel bei der linearen Funktion  $\varphi$  mit  $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 3$  (**Abb. 5**).

Die einzelnen vertikalen Sprunghöhen betragen in **Abb. 5**:  $3 \rightarrow 1,5 \rightarrow 0,75 \rightarrow \dots$ , d. h. jedes Mal Halbierung. (Diese fallen vermutlich auch zuerst auf, denn in der rechten Abbildung sind die Veränderungen der  $x_i$  nur vertikal zu beobachten, nicht horizontal; in der linken sind sie sowohl vertikal als auch horizontal zu beobachten.) Noch wichtiger, die vertikalen Abstände zum Wert  $x^* = 6$  werden auch in jedem Schritt halbiert:  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 1,5 \rightarrow 0,75 \rightarrow \dots$  Es ist günstig, bei solchen Experimenten  $x_0 > 0$  zu wählen, weil dann schon der erste Übergang  $x_0 \rightarrow x_1$  zum entsprechenden Muster gehört. Man könnte in Spinnwebdiagrammen (**Abb. 5** links) a priori auch die einzelnen horizontalen Veränderungen in den Fokus stellen, dann ist es nicht wichtig, wo der Startwert gewählt wird (aber die horizontalen Veränderungen sind im rechten ( $n | x_n$ )-Diagramm leider nicht ablesbar).

Das alles ist kein Zufall. Jede lineare Funktion hat genau einen Fixpunkt  $x^*$ , wenn  $m \neq 1$  ist (diesen Fixpunkt könnte man natürlich algebraisch leicht ausrechnen, aber davon wollen wir momentan absehen). Es sei  $x_0 \neq x^*$  ein beliebiger Startwert und  $x_n$  die zugehörige Folge mit  $x_{n+1} = \varphi(x_n) := m \cdot x_n + b$ .

Für die Abweichung  $\Delta_n := x_n - x^*$  nach  $n$  vielen  $\varphi$ -Iterationen gilt:

$$\Delta_{n+1} = x_{n+1} - x^* = (m \cdot x_n + b) - (m \cdot x^* + b) = m \cdot (x_n - x^*) = m \cdot \Delta_n$$

Das heißt,  $\Delta_n$  ist eine *geometrische Folge*, deren Faktor bzw. Quotient die Steigung der linearen Funktion ist:  $\Delta_n = m^n \cdot \Delta_0$

Dadurch kann man das Verhalten der Iteration für alle vier wichtigen Fälle bei linearen Funktionen sofort begründet allgemein beschreiben (dazu ist nur das Wissen nötig, wie sich  $m^n$  für wachsende  $n$  verhält, je nach verschiedenen Werten von  $m$ , Konvergenz bei  $|m| < 1$ , Divergenz bei  $|m| > 1$ ) und in einer Vierfeldertafel übersichtlich darstellen (**Tab. 1**).

Dazu sollen Lernende schon vor der theoretischen Auseinandersetzung damit viele Experimente mit Spinnwebdiagrammen und linearen Funktionen machen, sodass sie alle vier Fälle jeweils schon mindestens zweimal „gesehen“ haben. Die Spezialfälle  $m = -1, 0, 1$  (sie trennen die vier oben genannten Bereiche) sind zwar einfach zu behandeln, aber weder besonders spannend noch relevant, deswegen werden sie hier auch nicht weiter thematisiert.

Betrachtungen zu quadratischen Iterationen wie  $\varphi(x) = x + k \cdot x \cdot (G - x)$  oder  $\varphi(x) = k \cdot x \cdot (G - x)$  beziehungsweise  $\varphi(x) = k \cdot x \cdot (1 - x)$  (s. dazu das dafür entwickelte Applet unter <https://fr-vlg.de/ml239quaditeration>), wie sie beim diskreten logistischen Wachstum auftreten, können im Fall der letztgenannten Funktion anschaulich klären, dass hier Konvergenz (anziehender Fixpunkt) für  $0 < k < 3$  zu erwarten ist, für  $k > 3$  hingegen Divergenz (abstoßender Fixpunkt; dieser Fall führt in bekannter Weise zum mathematischen Chaos).

## Literatur

- Krebs, G. (1981): Näherungsweise Lösen von Gleichungen. Aus: Christmann, N. u. a. (Hrsg.): *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht unter besonderer Berücksichtigung der Möglichkeiten von Rechnern*. Schöningh, Paderborn, 91–127.
- Schuppar, B./Humenberger, H. (2015): *Elementare Numerik für die Sekundarstufe*. Springer Spektrum, Berlin – Heidelberg.