Teoría – Tema 9

Teoría - 13 - regla de L'Hopital

Regla de L'Hôpital en el cálculo de límites

La regla de L'Hôpital afirma que si al estudiar el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ encontramos la indeterminación $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, si existe el límite formado por $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, coincidirá con el valor del límite de partida.

Es decir, derivamos el numerador y el denominador por separado y calculamos el límite resultante.

Esta regla es muy potente, entre otros casos, para calcular límites donde no aparecen polinomios y no podemos aplicar las técnicas de límite estudiadas en temas pasados..

Ejemplo 1 resuelto

Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)}$ **.**

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{sen(x)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital

Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1}=1$

Ejemplo 2 resuelto

Calcula $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ **.**

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital

Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$

Ejemplo 3 resuelto

Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital

Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$

Ejemplo 4 resuelto

Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x + x}{-3e^x + 4}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x + x}{-3e^x + 4} = \frac{\infty}{-\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital

Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x + 1}{-3e^x} = \frac{\infty}{-\infty}$ Indeterminación

Aplicamos nuevamente L'Hôpital → $\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{-3e^x} = simplificar = \frac{-2}{3}$

Ejemplo 5 resuelto

Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\cos(x) - 1}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\cos(x) - 1} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital

Derivamos numerador y denominador por separado → $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{-sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{(x+1)sen(x)} = \frac{-1}{0} = \infty$

Y estudiamos los límites laterales para conocer el signo del infinito.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{(x+1)sen(x)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(x+1)sen(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

¿Siempre funciona la regla de L'Hôpital con indeterminaciones 0/0 o infinito/infinito?

No. A veces la regla no te da la solución del límite.

Fíjate en el siguiente límite, donde aparece un cociente de un polinomio de grado uno con una raíz de un polinomio de grado dos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$ → indeterminación → L'Hôpital

Derivamos numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$ → aplicamos nuevamente L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ → llegamos al mismo límite de partida → bucle sin fin

¿Cómo resolver en este caso?

Con las técnicas aprendidas en temas anteriores: dividiendo por la máxima potencia de la variable.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = simplificar = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = evaluar = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$$