Teoría – Tema 9

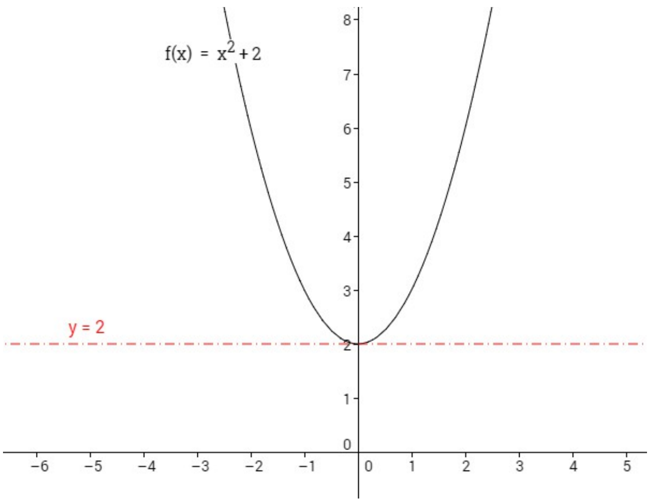
Teoría - 6 - punto crítico - condición necesaria y suficiente de extremo relativo

Punto crítico. Condición necesaria y suficiente de extremo relativo

A poco que pensemos en la interpretación geométrica de la derivada, nos daremos cuenta que la recta tangente a la función en un punto máximo o mínimo relativo será una recta horizontal (paralela al eje OX).

Es decir, **la derivada de la función evaluada en los puntos de extremo relativo vale** 0 .

La recta horizontal $y=2$ *es tangente a la función en el mínimo absoluto de la parábola, que también es mínimo relativo.*

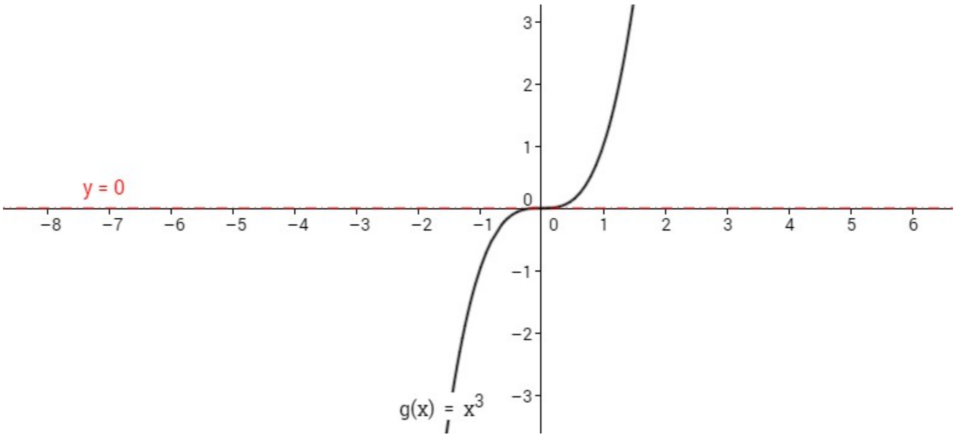


¿Significa esto que en aquellos puntos donde se anule la primera derivada siempre tendremos un extremo relativo?

No.

Los puntos que anulan la primera derivada son candidatos a convertirse en extremos relativos. Pueden serlo o pueden no serlo. Llamaremos **puntos críticos a estos valores que anulan la primera derivada**.

En el punto $(0{,}0)$ *la recta tangente* $y=0$ *tiene pendiente nula pero no es extremo*



La condición de anular la derivada es una condición necesaria para tener un extremo relativo.

¿Qué significa condición necesaria? Que todos los extremos relativos la cumplen, pero no todos los punto que anulan la primera derivada son extremos relativos.

Si la derivada no se anula, la función no cuenta con extremos relativos. Y si la derivada se anula, debemos buscar una **condición suficiente** para determinar si realmente esos puntos son extremos relativos. Un punto crítico puede ser máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión (cambio de curvatura alrededor del punto).

Condición necesaria de extremo relativo de la función $f(x)$

Si $f'(x_0)=0 \rightarrow x_0$ es candidato a extremo relativo → se denomina punto crítico.

Condición suficiente de extremo relativo: signo de la primera derivada (primera opción)

Si x_0 es punto crítico, y la derivada a la izquierda de x_0 es positiva $f'(x<x_0)>0$ y la derivada a la derecha de x_0 es negativa $f'(x>x_0)<0 \rightarrow x_0$ es un máximo relativo.

Si x_0 es punto crítico, y la derivada a la izquierda de x_0 es negativa $f'(x<x_0)<0$ y la derivada a la derecha de x_0 es positiva $f'(x>x_0)>0 \rightarrow x_0$ es un mínimo relativo.

Si x_0 es punto crítico, y la derivada no cambia de signo a la derecha y a la izquierda del punto crítico, x_0 no es un extremo relativo. Será un punto de inflexión.

Condición suficiente de extremo relativo: signo de la segunda derivada (segunda opción)

Si x_0 es punto crítico, y la segunda derivada evaluada en x_0 es negativa $f''(x_0)<0 \rightarrow x_0$ es un máximo relativo.

Si x_0 es punto crítico, y la segunda derivada evaluada en x_0 es positiva $f''(x_0)>0 \rightarrow x_0$ es un mínimo relativo.

Si x_0 es punto crítico, y la segunda derivada evaluada x_0 es nula $f''(x_0)=0 \rightarrow$ No podemos concluir nada sobre x_0 y deberemos repetir el razonamiento para derivadas mayores de orden par (cuarta derivada, sexta derivada, etc.) o bien hacer uso de la primera opción de la condición suficiente.

Ejemplo 1 resuelto

Estudiar los extremos relativos de $f(x)=x^2+2$ **.**

Derivamos e igualamos a cero → $f'(x)=2x$, $f'(x)=0$ → $x=0$ → punto crítico.

Vamos a aplicar, para practicar, las dos condiciones suficientes de extremo relativo.

En la práctica, solo será necesario aplicar una de las dos condiciones suficientes.

A la izquierda de $x=0$ podemos tomar, por ejemplo, $x=-1$ y evaluar la primera derivada → $f'(-1)=-2<0$ → Función estrictamente decreciente (derivada negativa).

A la derecha de $x=0$ podemos tomar, por ejemplo, $x=1$ y evaluar la primera derivada → $f'(1)=2>0$ → Función estrictamente creciente (derivada positiva).

Es decir, en $x=0$ tenemos un **mínimo relativo**.

Otra forma de verlo es aplicando el criterio de la segunda derivada → $f''(x)=2>0$ Positiva para cualquier valor del dominio → $x=0$ es un **mínimo relativo**.

Ejemplo 2 resuelto

Estudiar los extremos relativos de $f(x)=x^3$ **.**

Derivamos e igualamos a cero → $f'(x)=3x^2$, $f'(x)=0$ → $x=0$ → punto crítico.

Aplicamos la primera opción de la condición suficiente.

A la izquierda de $x=0$ podemos tomar, por ejemplo, $x=-1$ y evaluar la primera derivada → $f'(-1)=3>0$ → Función estrictamente creciente (derivada positiva).

A la derecha de $x=0$ podemos tomar, por ejemplo, $x=1$ y evaluar la primera derivada → $f'(1)=3>0$ → Función estrictamente creciente (derivada positiva).

Es decir, en $x=0$ **no tenemos extremo relativo, ya que la función es estrictamente creciente a ambos lados de** $x=0$. Por lo tanto, será punto de inflexión (ya que es un punto crítico que hemos demostrado que no es extremo relativo).

Ejemplo 3 resuelto

Estudiar los extremos relativos de $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ **.**

Derivamos e igualamos a cero → $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, $f'(x)=0$ → $x=0$, $x=2$ → dos puntos críticos.

Debemos evaluar el signo de la primera derivada a ambos lados de los puntos críticos, dándonos cuenta que la función no está definida en $x=1$ (hay una asíntota vertical). Por lo tanto tenemos los siguientes intervalos para tomar valores:

$(-\infty,0)$ → $f'(-1)>0$ → Función estrictamente creciente (derivada positiva)

$(0,1)$ → $f'(\frac{1}{2})<0$ → Función estrictamente decreciente (derivada negativa)

$(1,2)$ → $f'(\frac{3}{2})<0$ → Función estrictamente decreciente (derivada negativa)

$(2,\infty)$ → $f'(5)>0$ → Función estrictamente creciente (derivada positiva)

Por lo tanto, tenemos un **máximo relativo en** $x=0$ y un m**ínimo relativo en** $x=2$, como corrobora la siguiente gráfica de Geogebra.