

Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 7 - producto de matrices - cuándo conmutan dos matrices

1. Hallar todas las matrices que conmutan con:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar una matriz que conmute con A se tiene que cumplir que $A \cdot X = X \cdot A$. Es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término en ambas matrices.

$$\begin{pmatrix} x+z=x \\ y+t=x+y \\ z=z \\ t=z+t \end{pmatrix} \rightarrow z=0, \quad x=t, \quad y = \text{parámetro libre} \rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para hallar una matriz que conmute con B se tiene que cumplir que $B \cdot X = X \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2z & y-2t \\ -3x-4z & -3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y & -2x+4y \\ z-3t & -2z+4t \end{pmatrix}$$

Igualando término a término, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$x - 2z = x - 3y \rightarrow 2z = 3y$$

$$y - 2t = -2x + 4y$$

$$-3x + 4z = z - 3t$$

$$-3y + 4t = -2z + 4t \rightarrow -3y = -2z$$

Tomamos como parámetros libre las incógnitas z, t .

$$x = z + t, \quad y = \frac{2}{3}z \rightarrow X = \begin{pmatrix} z + t & \frac{2}{3}z \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para hallar una matriz que conmute con C se tiene que cumplir que $C \cdot X = X \cdot C$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x - z & -y - t \\ 2x + 3z & 2y + 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y & -x + 3y \\ -z + 2t & -z + 3t \end{pmatrix}$$

Igualando términos tenemos un sistema cuatro por cuatro:

$$-x - z = -x + 2y \rightarrow -z = 2y$$

$$-y - t = -x + 3y \rightarrow -t = -x + 4y$$

$$2x + 3z = -z + 2t \rightarrow 2x = -4z + 2t \rightarrow x = -2z + t$$

$$2y + 3t = -z + 3t \rightarrow -z = 2y$$

Tomamos y como parámetro libre:

$$z = -2y$$

$$t = x - 4y \rightarrow x = 4y + t$$

$$x = -2z + t \rightarrow x = 4y + t$$

$$\text{Tomamos } t \text{ como parámetro libre} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4y + t & y \\ -2y & t \end{pmatrix}$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$. Hallar a, b, c para que conmuten.

Dos matrices conmutan si y solo si se cumple:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Aplicado a nuestro problema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+c \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 1+c & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas:

$$a+1 = a+b$$

$$b+c = a$$

$$a = 1+c$$

$$b = 1$$

Por lo tanto, $b = 1$ y $a = 1+c$, quedando c como parámetro libre.

Es decir:

$$B = \begin{pmatrix} c+1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$