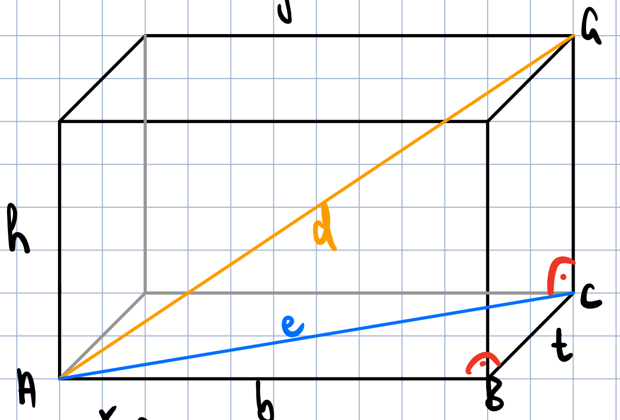
5. Länge von Vektoren

Gegeben ist ein Quader der Breite b, Höhe h und Tiefe t. Wir wollen die Länge der Raumdiagonalen d bestimmen:



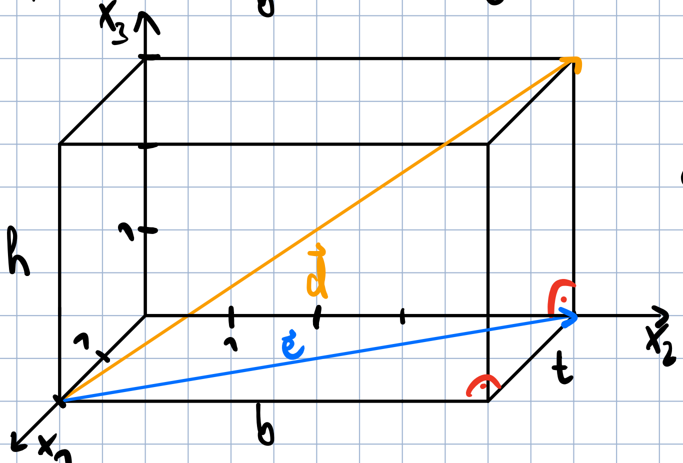
ΔABC ist rechtwinklig, weshalb folgt

$$e^2 = b^2 + t^2$$

ΔACG ist rechtwinklig, weshalb folgt

$$d^2 = e^2 + h^2 = b^2 + t^2 + h^2$$

$$\Rightarrow \quad d = \sqrt{b^2 + t^2 + h^2}$$



Die Raumdiagonale d kann nun jedoch auch aufgefasst werden als Vektor $\vec{d}$ mit den Koordinaten

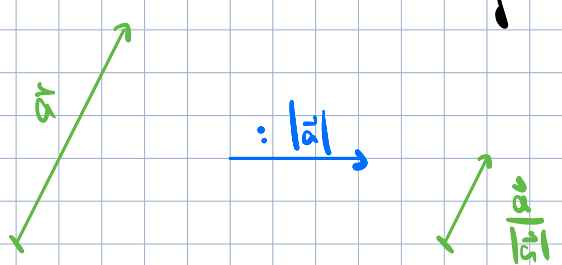
$$\vec{d} = \begin{pmatrix} t \\ b \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

weshalb folgt: $|\vec{d}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{38}$

MERKE

Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ besitzt die Länge $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Das Rechnen mit der 1 ist besonders leicht, weshalb es sinnvoll erscheint, aus einem Vektor $\vec{a}$ der Länge $|\vec{a}|$ einen Vektor der Länge 1 zu erzeugen, der in dieselbe Richtung zeigt.



Vektoren der Länge 1 (wie bspw. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) nennt man Einheitsvektoren. Wichtige Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$