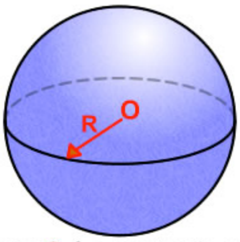
SÓLIDO ESFÉRICO:

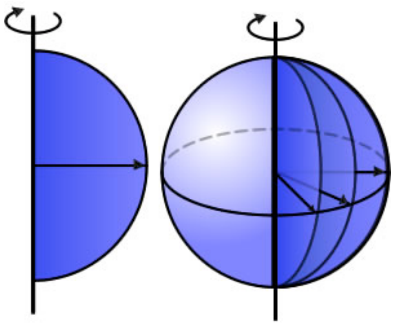
Consideremos um ponto O e um segmento de medida R. Chama-se esfera de centro O e raio R ao conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja menor ou igual a R.



O ponto O é o *centro* da esfera
R é o seu *raio*

SÓLIDO ESFÉRICO DE REVOLUÇÃO:

O sólido esférico também é um sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.



Uma esfera é um objeto tridimensional perfeitamente simétrico. Na matemática, o termo se refere à superfície de uma bola, mas geralmente se usa "esfera" para denominar um corpo maciço. Na maioria dos livros elementares sobre Geometria, a esfera é tratada como se fosse um sólido.

A esfera tem a menor superfície entre todos os sólidos de dado volume e tem o maior volume dentre todos os sólidos de determinada área.

SUPERFÍCIE ESFÉRICA:

Superfície da esfera de centro O e raio R é o conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a R.

SUPERFÍCIE ESFÉRICA DE REVOLUÇÃO:

A superfície de uma esfera é também a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo.

ELEMENTOS DA ESFERA:

Considerando a superfície de uma esfera de eixo E, temos:

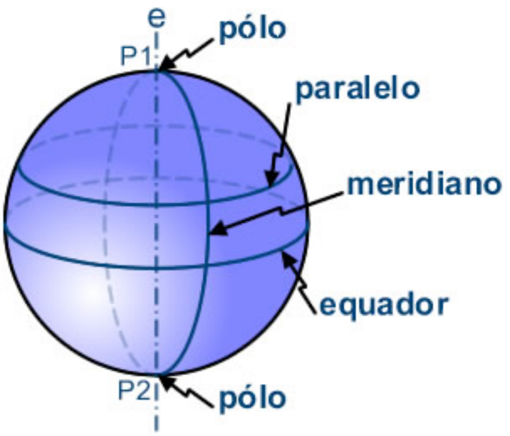
PÓLOS: são as intersecções da superfície com o eixo.

EQUADOR: é a secção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.

PARALELO: é uma secção (circunferência) perpe

MERIDIANO:: é a maior circunferência de uma seção que passa pelo eixo.

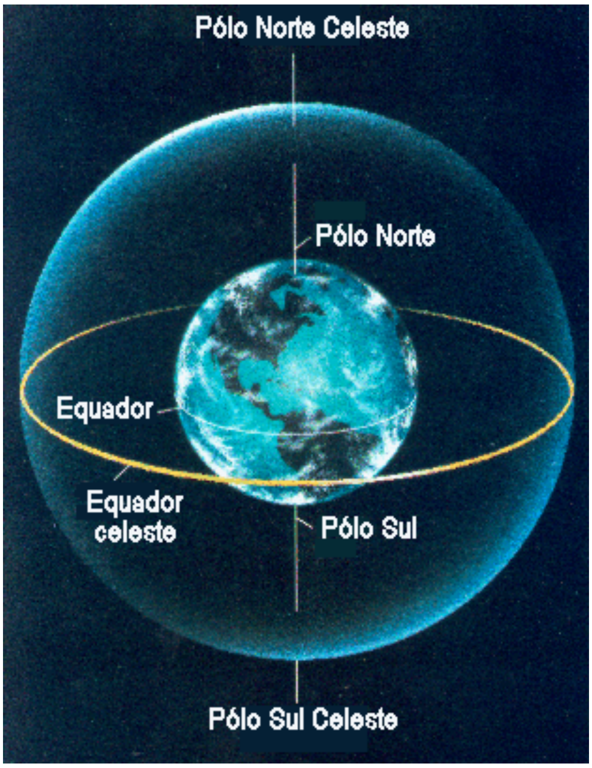
HEMISFÉRIO:: seccionando a esfera por um plano que passa exatamente no equador, dividimos a esfera em 2 partes, cada uma delas é um hemisfério da esfera.



CURIOSIDADES:

Considerando que a **esfera celeste** é uma esfera imaginária em cuja superfície as estrelas aparecem fixadas. Esta esfera para nós tem um raio que parece infinito. Nós nos encontramos no centro desta esfera.

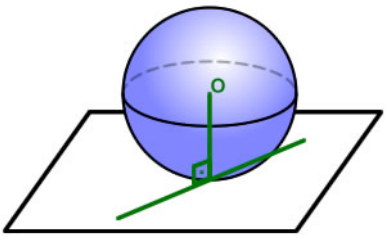
Vejamos o desenho a seguir onde podemos observar que os nomes dos elementos são usados em relação ao Planeta Terra:



Fonte do Desenho: http://astro.if.ufrgs.br/esf.htm

PLANO TANGENTE À ESFERA:

Um plano e uma esfera que têm um único ponto comum são tangentes. O raio que tem uma extremidade no ponto de tangência é perpendicular ao plano.



SEÇÃO ESFÉRICA:

Toda seção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera.

Observemos na figura o triângulo retângulo que traçamos unindo o centro da esfera (O), o centro da secção esférica (M) e o ponto da superfície esférica (A).

Consideremos:

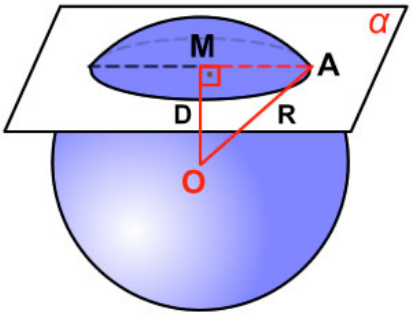
R é o raio da esfera,

D a distância do plano secante ao centro da esfera

S o raio da seção esférica obtida pelo plano.

$\mathbf{S^2 = R^2 - D^2}$ é a relação obtida aplicando o Teorema de Pitágoras neste triângulo.

Podemos afirmar que: "**<u>Quando um plano α secciona a esfera, obtém-se uma secção que é um círculo. O raio deste círculo (s) depende do raio da esfera (R) e a distância da secção ao centro da esfera (D) e podemos calculá-lo usando a relação:</u>** $\mathbf{S^2 = R^2 - D^2}$

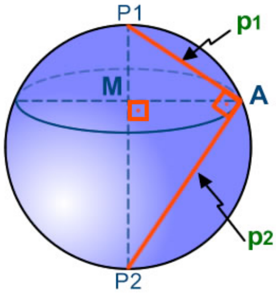


DISTÂNCIA POLAR:

É a distância de um ponto qualquer de um paralelo ao pólo. Um ponto A da superfície de uma esfera tem duas distâncias polares: P_1A e P_2A.

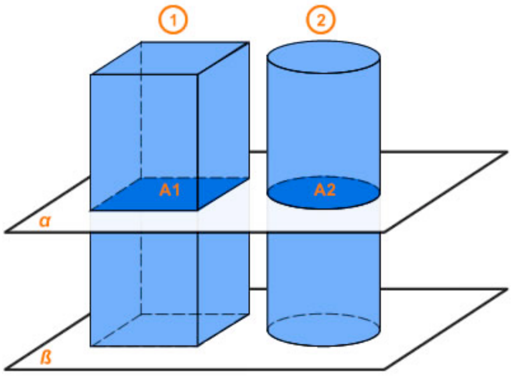
Lembremos que:

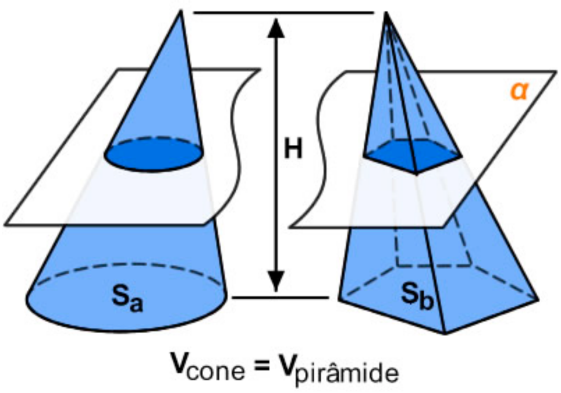
- o segmento $\overline{P_1P_2}$ é o diâmetro da esfera
- todo triângulo inscrito numa semicircunferência que tem um lado igual ao diâmetro é retângulo.
- portanto o triângulo com os vértices P_1, P_2 e A é retângulo e podemos usar o Teorema de Pitágoras para calcular as distâncias polares.



PRINCÍPIO DE CAVALIERI:

Considere dois sólidos e um plano α. Suponha que todo plano paralelo a α, que intercepte um dos sólidos, intercepte também o outro e determine secções transversais de áreas iguais. Nessas condições os dois sólidos têm volumes iguais.



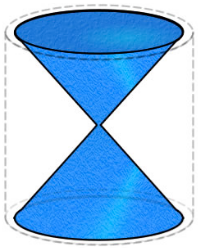


VOLUME DA ESFERA:

Vamos usar o Princípio de Cavalieri comparando o volume da esfera com o sólido chamado **Anticlépsidra.**

CLÉPSIDRA: Na figura temos um cilindro com dois cones dentro dele. Cada cone tem altura igual a metade da altura do cilindro, e o diâmetro da base de cada cone é igual ao diâmetro da base do cilindro.

Quando o cilindro é eqüilátero, ou seja, o diâmetro da base é igual a altura, chamamos de Clepsidra o sólido formado pelos dois cones no interior do cilindro.



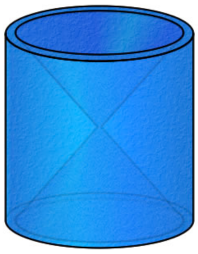
Volume da Clépsidra:

$V_{\text{CLÉPSIDRA}} = 2(\frac{1}{3}.\pi R^2.\frac{h}{2}) \Rightarrow V_{\text{CLÉPSIDRA}} = \frac{\pi R^2 h}{3}$

Como o cilindro é eqüilátero h = 2R

$V_{\text{CLÉPSIDRA}} = \frac{\pi R^2.2R}{3} \Rightarrow V_{\text{CLÉPSIDRA}} = \frac{2\pi R^3}{3}$

ANTICLÉPSIDRA: é o sólido obtido a partir do cilindro eqüilátero do qual retiramos o clépsidra.



Volume da Anticlépsidra:

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi R^2.h$

$V_{\text{ANTICLÉPSIDRA}} = \pi R^2.h - \frac{\pi R^2 h}{3} \Rightarrow V_{\text{ANTICLÉPSIDRA}} = \frac{2\pi R^2 h}{3}$

Como h = 2R

$V_{\text{ANTICLÉPSIDRA}} = \frac{2\pi R^2.2R}{3} \Rightarrow V_{\text{ANTICLÉPSIDRA}} = \frac{4\pi R^3}{3}$

Sabendo que na figura o cilindro é eqüilátero, isto é, a altura é igual a 2R, vamos calcular o volume da esfera, de raio R, sendo P' plano paralelo ao plano P.

Fazendo a intersecção do plano P' com a esfera, obtemos um círculo de área:

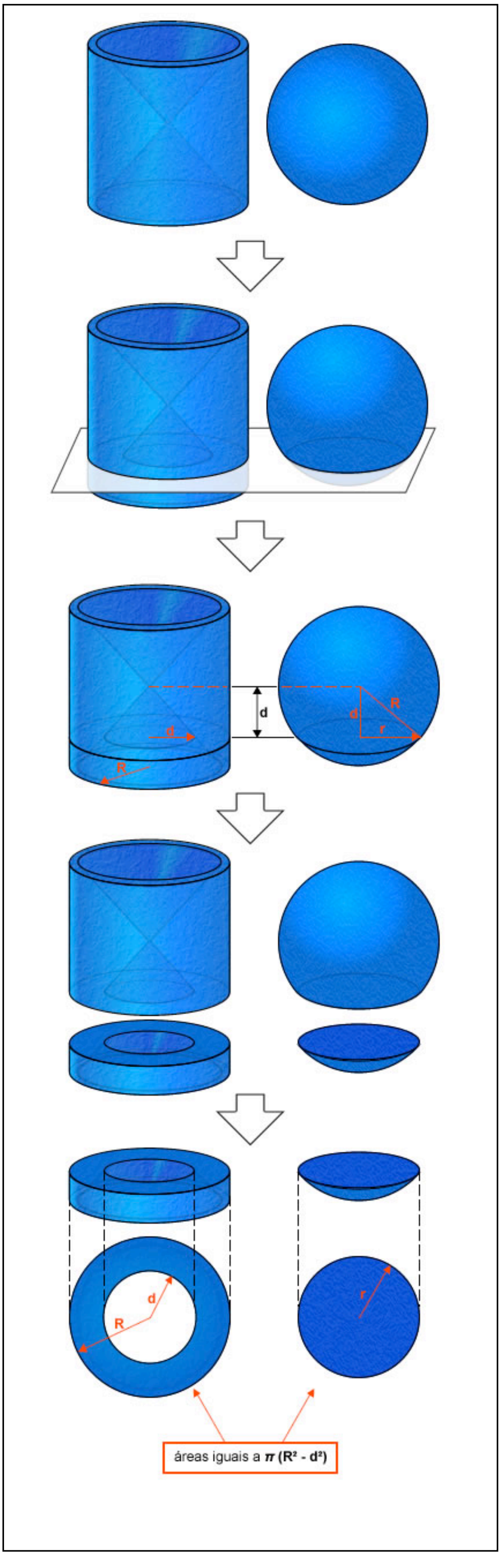
$r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2 \Rightarrow \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$

Fazendo a intersecção do plano P' com a anticlépsidra, obtemos uma coroa circular de área:

$\pi R^2 - \pi h^2 \Rightarrow \pi(R^2 - h^2)$

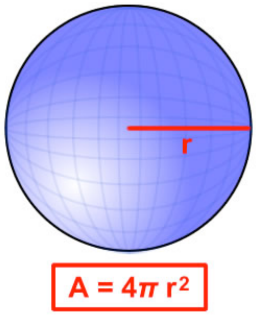
Como podemos ver a área do círculo obtido pela intersecção da esfera com o plano P' é igual a área da secção deste mesmo plano com a anticlépsidra, portanto pelo princípio de Cavalieri podemos afirmar que: $V_{\text{ESFERA}} = \frac{4\pi R^3}{3}$

Lembrando que um cone com **raio da base igual a R** e **altura igual ao raio R** tem $V_{\text{CONE}} = \frac{\pi R^3}{3}$, podemos dizer que uma **esfera de raio R** tem $V_{\text{ESFERA}} = 4.V_{\text{CONE}}$

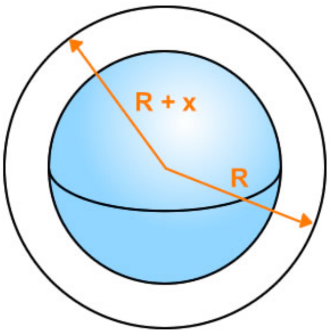

d
R
d
r
R
d
R
r
áreas iguais a π (R^2 - d^2)

ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA:

Fonte: http://www.lec.ufrgs.br/~dani/geo2-old/arquivos/geo06.doc
Fundamentos de Matemática Elementar volume 10 página 264.



A esfera não pode ser planificada sem sofrer algum tipo de deformação. A dedução da fórmula da superfície esférica é “matematicamente consistente” somente quando utilizamos os conhecimentos de Cálculo, assim, vamos apenas apresentar uma argumentação que nos mostra a origem da expressão $4\pi r^2$.



Consideremos 2 esferas com mesmo centro. A menor tem raio R e a maior tem raio R+x. região compreendida entre as duas esferas é a reunião dos segmentos de reta de comprimento x (a diferença entre os raios). Cada um desses segmentos é perpendicular a superfície das duas esferas.

Intuitivamente podemos escrever que o volume desta casca é aproximadamente igual a $S_e.x$, onde S_e é a superfície da esfera de raio R e também é igual ao volume da esfera maior menos o volume da esfera menor:

$$V = \frac{4}{3}\pi(R+x)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi[(R+x)^3 - R^3]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi[3R^2x + 3Rx^2 + x^3]$$

V $= \frac{4}{3}\pi x(3R^2 + 3Rx + x^2)$

$\frac{V}{x} = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3Rx + x^2)$

Então, para x→0, temos: $\frac{V}{x} = A$

Logo:

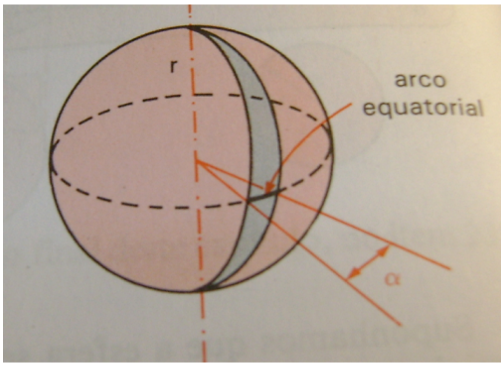
$A = \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3R.0 + 0^2)$

$A = 4\pi R^2$

Lembrando que a área da secção esférica que passa exatamente pelo equador, isto é, a maior secção esférica de uma esfera de raio R é $A_{SECÇÃO} = \pi R^2$, podemos dizer que a área da superfície esférica de uma esfera de raio R é: $A_{SUPERFÍCIE\_ESFÉRICA} = 4.A_{SECÇÃO}$

FUSO ESFÉRICO:

É a intersecção da superfície de uma esfera com um diedro cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica. O ângulo α, medida do diedro, medido na secção equatorial, é o que caracteriza o fuso.



ÁREA DO FUSO:

Como a esfera tem um ângulo central de 360º ou 2π radianos ($A_{ESFERA} = 4\pi r^2$), e o fuso é caracterizado pelo ângulo α, medida do diedro, encontramos a área do fuso através de uma regra de três:

a) com α em graus:

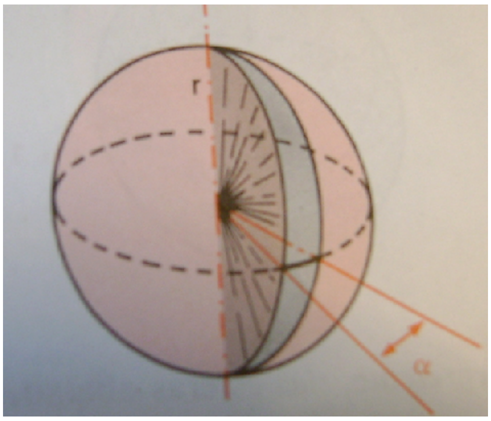
$$\begin{Bmatrix} 360^0 \rightarrow 4\pi r^2 \\ \alpha^0 \rightarrow A_{FUSO} \end{Bmatrix} \Rightarrow A_{FUSO} = \frac{(4\pi r^2)(\alpha)}{360}$$

b) com α em radianos:

$$\left.\begin{cases} 2\pi \rightarrow 4\pi r^2 \\ \alpha \rightarrow A_{FUSO} \end{cases}\right\} \Rightarrow A_{FUSO} = \frac{(4\pi r^2)(\alpha)}{2\pi}$$

CUNHA ESFÉRICA:

É a intersecção de uma esfera com um diedro cuja aresta contém o diâmetro da esfera. A cunha é caracterizada pelo raio da esfera e pela medida do diedro.



VOLUME DA CUNHA ESFÉRICA:

Como a esfera tem um ângulo central de 360º ou 2π radianos ($V_{ESFERA} = \frac{4\pi r^3}{3}$), e a cunha é caracterizada pelo ângulo α, medida do diedro, encontramos o volume da cunha através de uma regra de três:

a) com α em graus:

$$\left.\begin{cases} 360^0 \rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha^0 \rightarrow V_{CUNHA} \end{cases}\right\} \Rightarrow V_{CUNHA} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}.\alpha}{360}$$

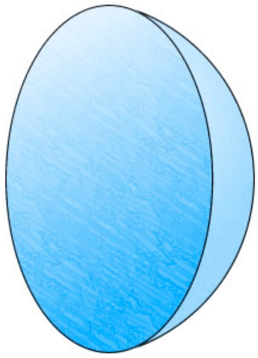
b) com α em radianos:

$$\left.\begin{cases} 2\pi \rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha \rightarrow V_{CUNHA} \end{cases}\right\} \Rightarrow V_{CUNHA} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}.\alpha}{2\pi}$$

SEGMENTO ESFÉRICO DE UMA BASE:

É cada uma das partes de uma esfera separadas por um plano que a intersecta, sendo o círculo a base do segmento esférico.

O contorno de um segmento esférico de uma base é formado por um círculo.



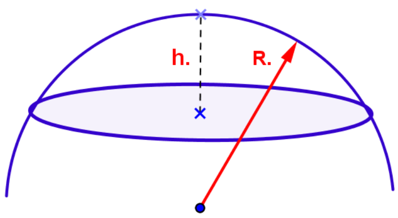
VOLUME DO SEGMENTO ESFÉRICO DE UMA BASE:

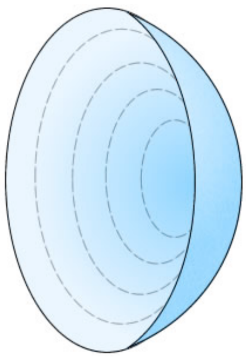
$$V = \frac{\pi h}{6}[3r^2 + h^2]$$

CALOTA ESFÉRICA:

É a superfície esférica de um segmento esférico.

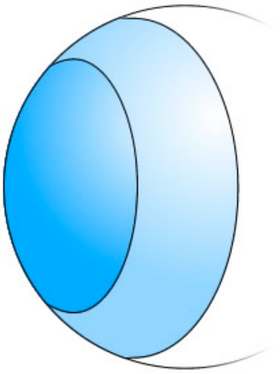
$$A_{CALOTA} = 2\pi R h_{CALOTA}$$

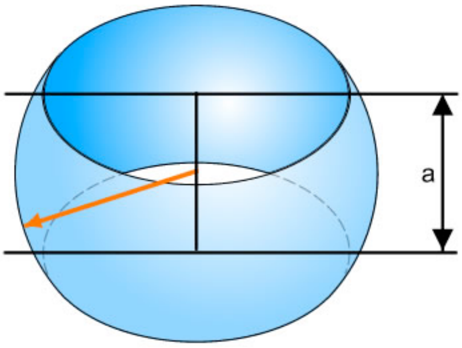




SEGMENTO ESFÉRICO DE DUAS BASES:

É a porção de esfera compreendida entre dois planos paralelos que intersectam a esfera, sendo o círculo a base desse segmento esférico.





VOLUME DO SEGMENTO ESFÉRICO DE 2 BASES:

$$V = \frac{\pi h}{6}[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$$

Onde:

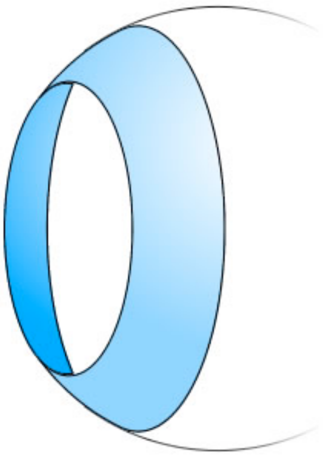
r1 é o raio de uma das bases

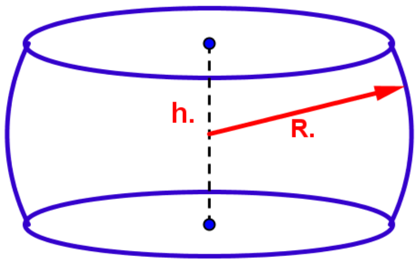
r_2 é o raio da outra base

h é a altura do segmento esférico

ZONA ESFÉRICA:

É a superfície esférica compreendida entre as bases de um segmento esférico de duas bases.





$$A_{ZONA} = 2\pi Rh$$