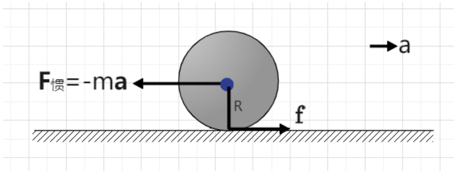
转盘悖论

当把轻质小球放在水平旋转的圆盘上，会发生有趣的现象，物体可以在圆盘上运动而不离开圆盘。如果小球在圆盘上做无滑滚动，那么当球被放置在转盘某一位置时，小球呈现一种特殊的运动状态。已知圆盘的转动角速度为$\vec{\omega}$，小球的质量为m，半径为R，转动惯量为I，初速度为$\vec{v}$。求证小球做匀速圆周运动并求出两者及周期之比。

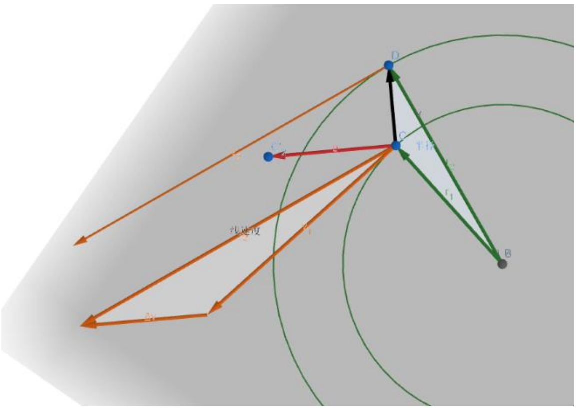
此时小球受到静（滚动）摩擦力f，设此时接触点的加速度大小为a，小球质心的加速度为$a_{球}$。若以该点为非惯性参考系 K，小球质心相对于 K 参考系加速度大小为a'。则此时小球还额外受到惯性力$F_{惯}=-ma$。取球心为支点，惯性力方向为正方向，对小球有：

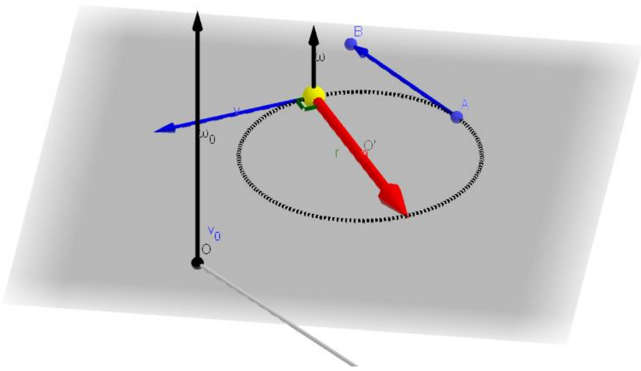
$$\begin{cases} ma-f=ma' \\ fR=I\beta \\ a'=R\beta \end{cases} \Rightarrow a'=\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}，\quad a'与a反向。$$



则再以 K 加速度a的方向为正方向，实际的加速度$a_{球}=a-a'$,可推得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{球}\left(\frac{mR^2}{1}+1\right)，\quad \boldsymbol{a}，\ \boldsymbol{a}_{球}同向。\qquad (1)$$





在圆盘上，径矢为$\vec{r}$的一点的线速度$\overrightarrow{v_{线}}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，对两边同时关于时间$t$求导，得：

$$\frac{d\overrightarrow{v_{线}}}{dt}=\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}=\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{a}\qquad (2)$$

联立（1），可得小球做与圆盘方向相同的匀速圆周运动

又$\because$小球加速度$\overrightarrow{a_{球}}=\overrightarrow{\omega_{球}}\times\vec{v}$

$$\therefore \boldsymbol{\omega}_{球}\left(\frac{mR^2}{I}+1\right)=\boldsymbol{\omega}$$

再联立$T=\frac{2\pi}{\omega}$可得：小球与转盘匀速圆周运动的周期之比

$$\frac{T_{球}}{T_{盘}}=\frac{mR^2}{I}+1$$