A1 : Retour sur les suites arithmétiques et géométriques

Capacités attendues	Non acquise	En cours d'acquisition	Acquise
Moyenne arithmétique de deux nombres.			
Forme explicite d'une suite arithmétique.			
Forme par récurrence d'une suite arithmétique.			
Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique.			
Moyenne géométrique de deux nombres.			
Forme explicite d'une suite géométrique.			
Forme par récurrence d'une suite géométrique.			
Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.			
Déterminer la raison d'une suite.			
Reconnaitre une situation pouvant être modélisée par une suite.			
Prouver que trois nombres sont des termes d'une suite arithmétique ou géométrique.			

I/ Les suites arithmétiques :

1) Rappels de première :

Définitions

Une suite est arithmétique lorsque, à partir d'un terme initial, on passe d'un terme de la suite au suivant en ajoutant toujours le même nombre a, appelé la raison.
Pour tout entier n :

- $u_{(n+1)} = u_n + a$ (forme par récurrence)
- $u_n = u_0 + n \times a$ (forme explicite, u_n expression de en fonction de n)

Attention pour la forme explicite la formule n'est correcte que si l'on commence à u_0. Si l'on commence à u_1, il faudra faire $(n - 1) \times a$.
Une suite arithmétique a une croissance linéaire, c'est-à-dire que si l'on trace u_n en fonction de n les points sont alignés.

Méthode, vérifier qu'une suite est arithmétique :

Pour cela il y a deux méthodes :

- **Graphique :** En vérifiant que les points sont alignés.
- **Par le calcul :** Si l'on connait l'expression de u_n en fonction de n. Il faut calculer la différence $u_{(n+1)} - u_n$. Le résultat de cette différence doit être constant et égal à la raison.

2) Somme des termes d'une suite arithmétique :

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique se calcule de la manière suivante :

$$S = nombre\ de\ terme\ \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}$$

Il faudra bien attention lors du comptage du nombre de termes.

Notation :

Pour être rigoureux mathématiquement, on note de la manière suivante la somme des n premiers termes d'une suite :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Cette notation signifie simplement qu'on additionne les n premiers termes de la suite.
Attention cette formule n'est valable que si la suite commence à u_0.

Exemple :

Soit la suite arithmétique de terme initial 2 et de raison 4. Calculer la somme des termes jusqu'à u_{10} premiers termes :
Le premier terme est donc 1 le dernier se calcul à l'aide de la forme explicite donc :
$u_{10} = u_0 + 10 \times 4 = 42$

$$\sum_{n=0}^{n=10} u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = (10+1) \times \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 11 \times \frac{2+42}{2} = 242$$

Exercice d'application :

Une ville organise la récupération du verre usagé à partir du 1^{er}janvier 2010.
En 2010, la ville a récupéré 300 tonnes de verre et en 2011, elle en a récupéré 330 tonnes.
Pour tout entier n, on note u_n la quantité de verre récupéré, en tonne, au cours de l'année 2010+n.
On sait que la croissance de la suite est linéaire.

1) Quelle est la nature de la suite ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

2) Déterminer la masse totale de verre récupéré entre le 1^{er}janvier 2010 et le 31 décembre 2024.

3) Moyenne arithmétique de deux nombres :

La moyenne arithmétique de deux nombres a et b, se calcule avec la formule suivante :

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Exemple :

Une personne achète dans un premier magasin un pot de pâte à tartiner à 5€, en passant devant un autre magasin elle décide d'acheter un autre pot de pâte à tartiner au prix de 3€. Calculer la moyenne arithmétique du prix.
$m = \frac{5+3}{2} = 4$€
Donc en moyenne le pot coûte 4€.

On remarquera que la somme des termes de la suite arithmétique est tout simplement la moyenne arithmétique du premier et du dernier terme, multipliée par le nombre de termes.

II/ Les suites géométriques :

1) Rappels de première :

Définition :

Une suite est géométrique lorsque, à partir d'un terme initial, on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre q, appelé la raison.
Pour tout entier n :

- $u_{(n+1)} = u_n \times q$ (forme par récurrence)
- $u_n = u_0 \times q^n$ (forme par récurrence).

Attention pour la forme explicite la formule n'est correcte que si l'on commence à u_0. Si l'on commence à u_1, il faudra faire $q^{(n-1)}$.

Une suite géométrique a une croissance exponentielle.

Méthode : vérifier qu'une suite est géométrique :

- **Graphiquement :** Si la croissance de la courbe est exponentielle
- **Par le calcul :** Si l'on connait l'expression de $u_n$en fonction de n. Il faut calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Le résultat doit être constant et égal à la raison.

2) Somme des termes d'une suite géométrique.

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique se calcule de la manière suivante :

$$S = premier\ terme\ \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$$

Notation :

Pour être rigoureux mathématiquement, on note de la manière suivante la somme des *n* premiers termes d'une suite :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Cette notation signifie simplement qu'on additionne les *n* premiers termes de la suite.
Attention cette formule n'est valable que si la suite commence à u_0.

Exemple :

Soit la suite géométrique définie par $u_0 = 10$ et $q = 2$. Calculer la somme des neuf premiers termes.

$$S = 10 \times \frac{1-2^{9+1}}{1-2} = 10\ 230$$

Exercice d'application :

Une ville organise la récupération du verre usagé à partir du 1^{er}janvier 2010.
En 2010, la ville a récupéré 300 tonnes de verre et en 2011, elle en a récupéré 330 tonnes.
Pour tout entier n, on note u_n la quantité de verre récupéré, en tonne, au cours de l'année 2010+n.
La croissance de cette suite est exponentielle.

1) Quelle est la nature de la suite ? En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

2) Déterminer la masse totale de verre récupéré entre le 1^{er}janvier 2010 et le 31 décembre 2024.

3) Moyenne géométrique de deux nombres :

La moyenne géométrique de deux nombres *a* et *b*, se calcule avec la formule suivante :

$$m = \sqrt{a \times b}$$

Cette moyenne est utile pour trouver des taux moyens. Elle ne s'applique uniquement qu'à des grandeurs qui se multiplient.
Pour simplifier les calculs, on se rappellera que : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemple :
L'an dernier le prix de l'électricité à diminué de 2%, cette année ils augmentent de 1,54%. Quel est le taux moyen d'évolution sur ces deux années consécutives ?

On commence par déterminer les coefficients multiplicateurs correspondants à chaque évolution :
Diminution de 2% : $CM_1 = 1 - \frac{2}{100} = 0{,}98$
Augmentation de 1,54% : $CM_2 = 1 + \frac{1{,}54}{100}$ = 1,0154

On calcule la moyenne géométrique des deux CM :
$m = \sqrt{0{,}98 \times 1{,}0154} \approx 0{,}998$

On en déduit le taux de variation moyen :

$$t = (0{,}998 - 1) \times 100 = -0{,}2$$

Donc la variation annuelle moyenne est de -0,2 %