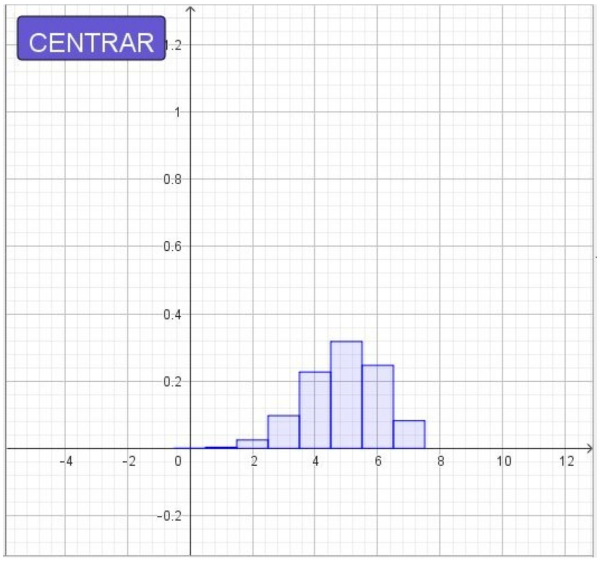
☺ Distribución Binomial. X ~ Bi(n,p).

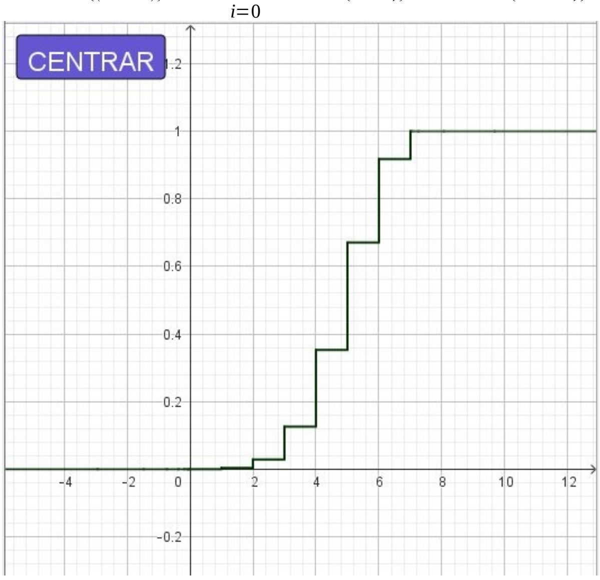
Una v. a. X tiene distribución Binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0,1)$. Siendo $q = 1 - p$ si tiene como función de probabilidad: $f_X(x) =$ Y cuya función de distribución es: $F_X(x) =$

$$= 0 \cdot I_{\{\mathbb{R} - \{0,1,\ldots,n\}\}}(x) + \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

$$= 0 \cdot I_{\{(-\infty,0)\}}(x) + \sum_{i=0}^{[x]} f(i) \cdot I_{\{[0,n)\}}(x) + 1 \cdot I_{\{[n,+\infty)\}}(x)$$



Ejemplo de f(x) para p=0,7 y n=7



Ejemplo de F(x) para p=0,7 y n=7

Fácilmente, se comprueba que f es una función de probabilidad, ya que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Observaciones:

- Si $n = 1$, X sigue una distribución de Bernoulli B(p).
- $\sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0 = (p+q)^n$
- Si $X \quad Bi(n,p)$, X se puede expresar como $X = X_1 + X_2 + \ldots + Xn$, con $Xi \quad B(p)$.

Además

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) \quad .$$

Algunos de sus parámetros o momentos destacables son:

✔ $E\{X^k\} = \sum_{i=0}^{n} i^k \cdot f(i) = \sum_{i=0}^{n} i^k \cdot \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}; \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$

Teniendo en cuenta que:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} = \frac{n}{i} \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)! \cdot (n-i)!} = \frac{n}{i} \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)! \cdot ((n-1)-(i-1))!} = \frac{n}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1}$$

Para $k = 1$, Se cumple:

$$E\{X\}=\sum_{i=0}^{n} i\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i}=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i}=n\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\cdot p^i\cdot q^{n-i}=$$
$$=n\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot p^{j+1}\cdot q^{n-(j+1)}=n\cdot p\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot p^j\cdot q^{n-1-j}=n\cdot p\cdot(p+q)^{n-1}=$$
$$=n\cdot p=\alpha$$

Para $k=2$, Se cumple:

$$E\{X^2\}=\sum_{i=0}^{n} i^2\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i}=\sum_{i=1}^{n} i^2\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i}=n\cdot\sum_{i=1}^{n} i\cdot\binom{n-1}{i-1}\cdot p^i\cdot q^{n-i}=$$
$$=n\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\cdot\binom{n-1}{j}\cdot p^{j+1}\cdot q^{n-(j+1)}=n\cdot p\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\cdot\binom{n-1}{j}\cdot p^j\cdot q^{n-1-j}=$$
$$=n\cdot p\cdot\sum_{j=0}^{n-1} j\cdot\binom{n-1}{j}\cdot p^j\cdot q^{n-1-j}+n\cdot p\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\cdot p^j\cdot q^{n-1-j}=$$
$$=n\cdot p\cdot((n-1)\cdot p)+n\cdot p\cdot(p+q)^{(n-1)}=n\cdot p\cdot((n-1)\cdot p+1)$$

✔ $E\{(X-\alpha)^k\}=\sum_{i=0}^{n}(i-E\{X\})^k\cdot f(i)=\sum_{i=0}^{n}(i-n\cdot p)^k\cdot\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i};\forall k\in\mathbb{N}-\{0\}$.

En particular si $k=2$, se cumple:

$$E\{(X-\alpha)^2\}=E\{X^2\}-(E\{X\})^2=n\cdot p\cdot((n-1)\cdot p+1)-(n\cdot p)^2=n\cdot p\cdot(1-p)=$$
$$=n\cdot p\cdot q=\mu_2$$

✔ $\varphi(t)=(q+p\cdot e^{\hat{\imath}\cdot t})^n$.

Observaciones:

* Si tenemos en cuenta que X se puede poner como suma de n variables de Bernoulli, es decir:

Si $X\ Bi(n,p)$, X se puede expresar como $X=X_1+X_2+\ldots+Xn$, con $Xi\ B(p)$, podemos deducir:

$$E\{X\}=E\{X_1\}+E\{X_2\}+\ldots+E\{Xn\}=n\cdot p$$

$$Var(X)=Var(X_1)+Var(X_2)+\ldots+Var(Xn)=n\cdot p\cdot q$$

$$\phi_X(t)=E\{e^{X\cdot t\cdot\hat{\imath}}\}=E\{e^{\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot t\cdot\hat{\imath}}\}=\prod_{i=1}^{n}E\{e^{X_i\cdot t\cdot\hat{\imath}}\}=(q+p\cdot e^{\hat{\imath}\cdot t})^n$$

* Si X_i es una distribución $B(n,p)$, para $i=1,2,\ldots,k$, entonces $X=X_1+X_2+...+X_k$ entonces $X=X_1+X_2+...+X_k$ ses una distribución $B(n_1+n_2+...+n_k,p)$