# Teoría – Tema 5

# Teoría - 7 - cociente de polinomios con raíces complejas

## Grado del numerador P(x) menor que Grado del denominador Q(x) y raíces complejas

A nivel de 2ºBachillerato vamos a estudiar integrales con denominadores formados por ecuaciones de segundo grado con compleja. El denominador Q(x) siempre será un polinomio de segundo grado en los ejercicios de este tipo que vamos a afrontar en Bachillerato

Vamos a considerar dos tipos de integrales que cumplen estos requisitos: integrales con numerador P(x) igual a una constante e integrales con numerador P(x) igual a un polinomio de grado uno.

$$\int \frac{k}{a x^2+b x+c} dx \quad \rightarrow \text{Buscaremos arcotangente} \rightarrow \quad \frac{d[arcotg(f(x))]}{dx}=\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

$$\int \frac{A x+B}{a x^2+b x+c} dx \quad \rightarrow \text{Buscamos logaritmo} \rightarrow \quad \frac{d[\ln(f(x))]}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

La idea de **buscar la forma de la derivada de la arcotangente o del logaritmo dentro de la integral puede aplicarse tanto si el polinomio del denominador admite soluciones complejas como reales**.

Lógicamente, si la ecuación de segundo grado admite soluciones reales y somos capaces de obtenerlas, la integral quedaría reducida a alguno de los casos anteriormente descritos para raíces reales simples o múltiples.

Estos métodos son herramientas útiles, sabiendo que en algunas integrales se pueden acortar los pasos de solución sumando, restando, multiplicando y/o dividiendo factores... y esto solo se aprende con la práctica.

Recordando que **integrar tiene un poco de arte**... y el arte tiene mucho de esfuerzo y trabajo, y una **pizca de inspiración**.

**Ejemplo 1 resuelto**

**Resuelve** $\int \frac{1}{2x^2+x+2}dx$

Factorizamos a la unidad el coeficiente líder del denominador. Sacamos factor común de $2$ .

$$2x^2+x+2=2\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)$$

Comparamos el polinomio de grado dos del denominador con el desarrollo de un binomio de Newton

$$(x+a)^2=x^2+a^2+2ax$$

Igualamos los términos que acompañan a la variable “x” en nuestro denominador y en el binomio desarrollado.

$\frac{x}{2}=2ax$ → simplificamos “x” → $\frac{1}{2}=2a$ → $a=\frac{1}{4}$

Sustituimos este valor en el binomio de Newton.

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=x^2+\frac{1}{16}+\frac{x}{2}$$

El término independiente de nuestro denominador es “1” mientras que el término independiente del binomio desarrollado es “1/16”. Por lo que escribimos el factor “1” de la siguiente forma:

$$1=\frac{1}{16}+\frac{15}{16}$$

Así el denominador de la integral queda:

$$2\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)=2\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\right)$$

Y ya podemos identificar el siguiente binomio de Newton:

$$2\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\right)=2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right)$$

Llevamos todo este razonamiento a la integral.

$$\int \frac{1}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}dx$$

En el denominador sacamos “15/16” como factor común.

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{15}{16}+\left(\frac{4x+1}{4}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{15}{16}\cdot\left[1+\frac{16}{15}\cdot\left(\frac{4x+1}{4}\right)^2\right]}dx=\frac{16}{2\cdot 15}\int \frac{1}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2}dx$$

$$\frac{8}{15}\int \frac{1}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2}dx=\frac{8}{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\int \frac{\frac{4}{\sqrt{15}}}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot arcotg\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)+C$$

**Ejemplo 2 resuelto**

**Resuelve** $\int \frac{x+5}{2x^2+x+2}dx$

Buscamos que el numerador muestre la derivada del polinomio del denominador. Para ello multiplicamos todo el denominador por “4” y expresamos la cantidad “20” como “1 + 19”.

$$\int \frac{x+5}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+20}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+1+19}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+2}dx+\frac{1}{4}\int \frac{19}{2x^2+x+2}dx$$

Hemos roto el numerador en dos partes. Por un lado $4x+1$ , que coincide con la derivada del denominador. Y por otro lado $19$ .

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x+2}dx+\frac{1}{4}\int \frac{19}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{4}\ln|2x^2+x+2|+\frac{19}{4}\int \frac{1}{2x^2+x+2}dx+C$$

La integral que aparece en el segundo sumando es idéntica a la resuelta en el ejemplo anterior, por lo que escribimos directamente su solución final.

$$\frac{19}{4}\ln|2x^2+x+2|+\frac{19}{2\cdot\sqrt{15}}arcotg\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)+C$$