Teoría – Tema 9

Teoría - 9 - Puntos coplanarios

Condiciones que cumplen cuatro puntos coplanarios

Sean los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ y $D(x_4, y_4, z_4)$ no alineados por una recta.

Serán coplanarios (pertenecientes al mismo plano) **si los tres vectores que podemos formar tomando como origen uno de los puntos y como extremos finales los otros tres puntos, generan una matriz de rango 2** (es decir, de los tres vectores solo hay dos linealmente independientes).

$$Rango(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})=2$$

Por lo tanto, la siguiente matriz cuadrada de orden 3 debe tener determinante nulo

$$\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{pmatrix}$$ → Matriz formada por tres vectores fila

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$$ → **Condición a cumplir por cuatro puntos coplanarios**

Otra forma de expresa esta igualdad es, usando propiedades de los determinantes, proponer el siguiente determinante equivalente:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ 0 & x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ 0 & x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} F'_2=F_2+F_1 \\ F'_3=F_3+F_1 \\ F'_4=F_4+F_1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}=0$$

Otro método sería el siguiente: obtener el plano que contiene a tres de los cuatro puntos (con un punto y dos vectores linealmente independientes formado por los tres puntos), y comprobar si el cuarto punto pertenece al plano (sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano).