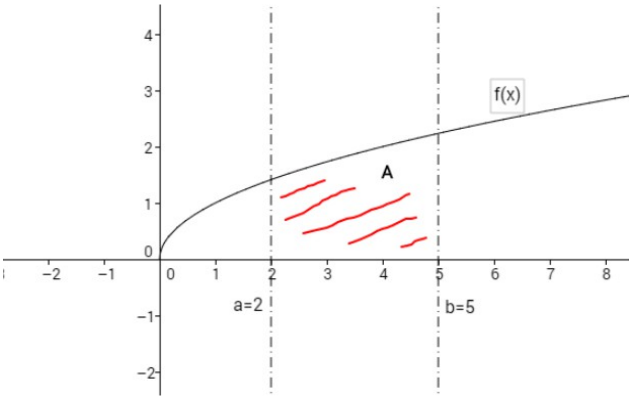
Teoría – Tema 5

Teoría - 20 - introducción a la integral definida

El problema del cálculo del área

El cálculo integral tuvo su origen en la resolución a la pregunta sobre el **área de una superficie limitada por curvas**. Cuando el recinto acotado es un polígono de lados rectos, usamos fórmulas bien conocidas: Pero cuando tenemos funciones de trazo curvo, el asunto se complica.

La función $f(x)$ *encierra un área* A *con eje* OX *y rectas verticales* $x=2,\ x=5$



Si $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a,b]$, **la integral** $\int_a^b f(x)dx$ **recibe el nombre el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$$Área=\int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$, **el valor absoluto de la integral** $|\int_a^b f(x)dx|$ **coincide con el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$$Área=-\int_a^b f(x)dx=|\int_a^b f(x)dx|$$

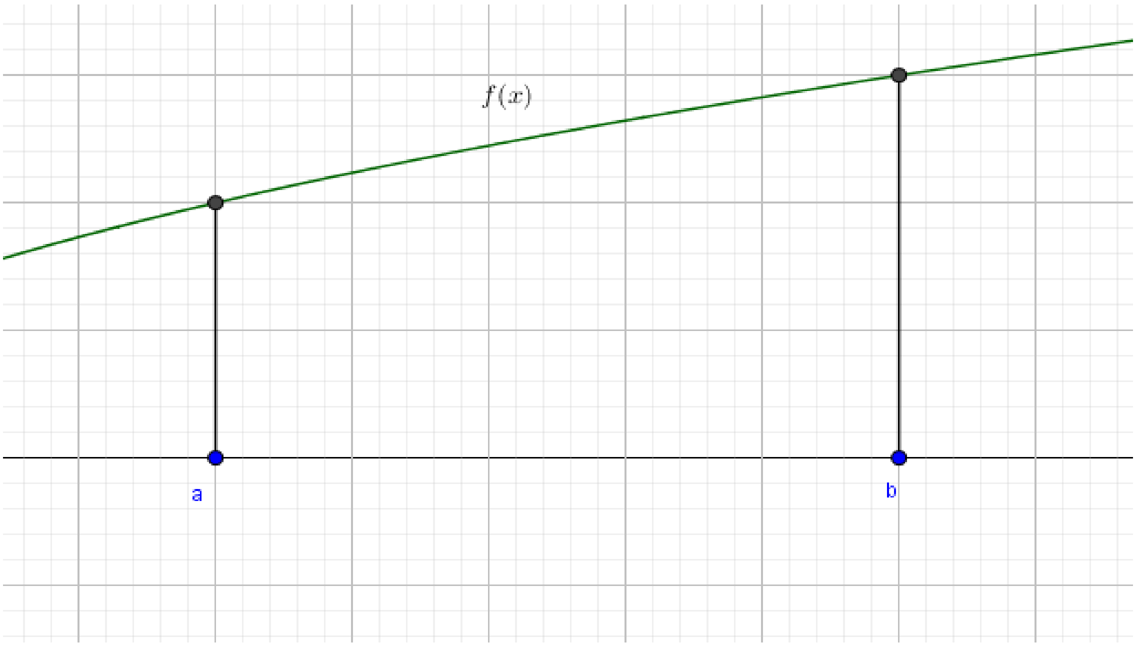
La expresión $\int_a^b f(x)dx$ se denomina **integral definida** de $f(x)$ en $[a,b]$.

Definición formal de la Integral de Riemann. Suma superior e inferior

Sea $f(x)$ una función no negativa y continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. La gráfica de la función, el eje de abscisas y la rectas verticales $x=a$ y $x=b$ determinan un recinto cerrado de área A.

Si $f(x)$ es una recta, este recinto cerrado tendrá forma de triángulo o de rectángulo. Y el área será fácil de obtener con las fórmulas elementales del área. Pero si $f(x)$ es una curva no rectilínea, el asunto no es tan fácil.

Área encerrada por la gráfica $f(x)$ con el eje horizontal en el intervalo $[a,b]$



Podemos aproximar el valor del área de la siguiente forma.

Vamos a tomar una partición del intervalo $[a,b]$. Una partición no es más que un conjunto finitos de valores $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, donde $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$.

Sabemos que toda función continua en un intervalo cerrado está acotada en dicho intervalo. Recuerda que la menor de las cotas superiores se llama supremo y el mayor de las cotas inferiores se llama ínfimo. Así, todos los intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ tendrán su correspondiente supremo y ínfimo.

Fíjate que al ser $f(x)$ continua en todos los intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, el supremo coincide con el máximo y el ínfimo con el mínimo (Teorema de Bolzano-Weierstrass).

Tendremos n intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Siendo la anchura de cada intervalo la diferencia:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \rightarrow \quad \Delta x_1 = x_1 - x_0 \quad , \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 \quad , \ldots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

El supremo que toma la función en cada intervalo lo llamaremos:

$$E_i = supremo\{f(x) / x \in [x_{i-1} - x_i]\}$$

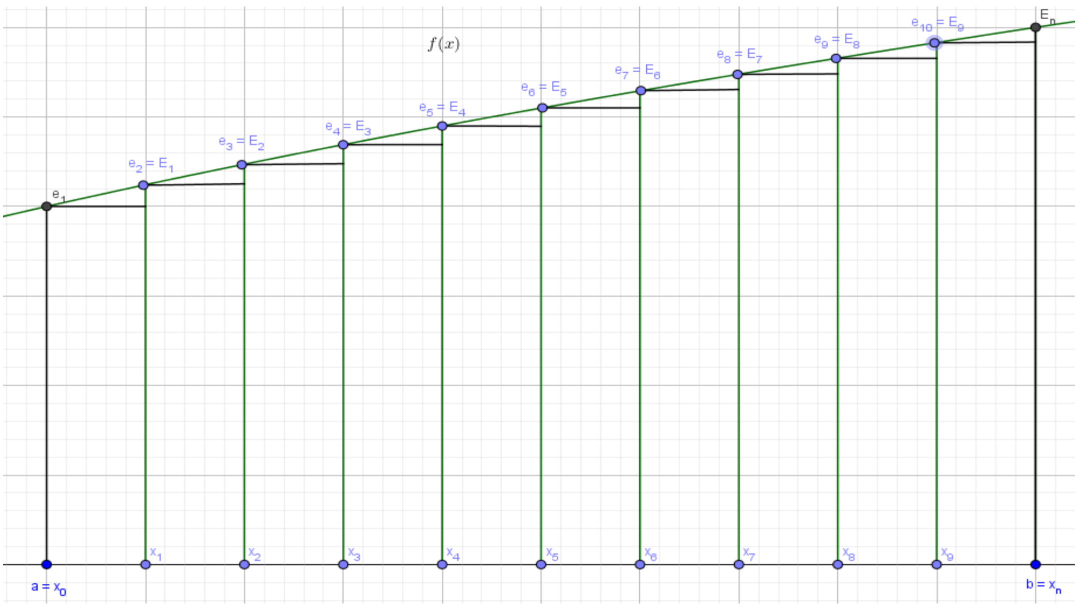
El ínfimo que toma la función en cada intervalo lo llamaremos:

$$e_i = ínfimo\{f(x) / x \in [x_{i-1} - x_i]\}$$

Si multiplicamos la anchura de un intervalo por su ínfimo, tendremos el área del rectángulo correspondiente. La suma de todos estos rectángulos se llama suma inferior y es una aproximación al área encerrada por la función.

$$\underline{S}(f, P) = e_1 \cdot \Delta x_1 + e_2 \cdot \Delta x_2 + ... + e_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i \Delta x_i$$

Ejemplo de Suma inferior, que aproxima por defecto el área encerrada por la función



Si multiplicamos la anchura de un intervalo por su supremo, tendremos el área del rectángulo correspondiente. La suma de todos estos rectángulos se llama suma superior y es otra aproximación al área encerrada por la función.

$$\overline{S}(f, P) = E_1 \cdot \Delta x_1 + E_2 \cdot \Delta x_2 + ... + E_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} E_i \Delta x_i$$

La suma inferior aproxima el área A por defecto. Y la suma superior por exceso. Es decir.

$$\underline{S}(f,P)\leq A\leq\overline{S}(f,P)$$

Cuanto más fina sea la partición P, mejor será la aproximación, ya que ambas sumatorias se acercarán cada vez más al valor exacto del área.

Si el intervalo de partida es $[a,b]$, su anchura es $b-a$. Si tomamos una partición que divide $[a,b]$ en n intervalos de igual anchura, la anchura de cada uno de estos intervalos será:

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$$

En el caso límite de $n\to\infty$ las dos sumatorias convergerán al valor único del área A. Y ese área se define como la integral definida:

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e_i\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}E_i\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\phi_i)\Delta x_i \quad , \quad \phi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

Esta es la definición de función $f(x)$ integrable según Riemann, o R-integrable, sobre el intervalo $[a,b]$. Cualquier función acotada $[a,b]$ es R-integrable. O también podemos decir que cualquier función continua en $[a,b]$ es R-integrable.

Si $f(x)>0$ en $[a,b]$ $\to$ $\int_a^b f(x)\,dx=A$

Si $f(x)<0$ en $[a,b]$ $\to$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=A$

Ejemplo 1 resuelto sobre definición formal de integral de Riemann

Demostrar que el área encerrada por una recta horizontal $f(x)=k$ en el intervalo $[a,b]$ es igual a $A=k(b-a)$ (fórmula del área de un rectángulo: base por altura).

$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}e_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}k\,\Delta x_i$ → Al ser la función constante $e_i=k$

$$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}k\,\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=k[(x_1-a)+(x_2-x_1)+...+(b-x_{n-1})]$$

$$\underline{S}(f,P)=k(b-a)$$

De igual forma se demuestra:

$$\overline{S}(f,P)=k(b-a)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P)=k(b-a)=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P) \quad\rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx=k(b-a)=A$$

Como queríamos demostrar.