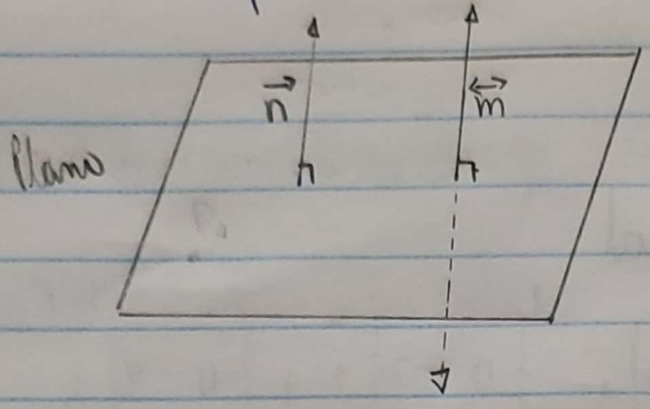
Actividad de aula 1

① Halle un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-4, 5, 2)$ y es perpendicular al plano dado por $-x + 2y + z = 5$



Sea $\vec{n}$ un vector normal al plano dado, entonces $\vec{n} \parallel \overleftrightarrow{m}$. Luego, $\vec{n} = \langle -1, 2, 1 \rangle$

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 5 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$=$

② Determine si las rectas se cortan, y si es así, hallar el punto de intersección

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = z+1 \quad ; \quad \frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$$

$\tau = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\tau$; $r = \frac{x-1}{4} \Rightarrow x = 1+4r$

$\tau = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow y = 2-\tau$; $r = y+2 \Rightarrow y = -2+r$

$\tau = z+1 \Rightarrow z = -1+\tau$; $r = \frac{z+3}{-3}$ $z = -3-3r$

- Igualamos "x" y "y":

$$3\tau = 1+4r$$
$$2-\tau = -2+r$$
③ $-1+\tau = -3+3r$

① $3\tau - 4r = 1$ (1)

② $-\tau - r = -4$ (3)

$\Downarrow$

$$3\tau - 4r = 1$$
$$-3\tau - 3r = -12$$
$$-7r = -11 \Rightarrow r = 11/7$$

- Sustituimos en ② a r: $-\tau - 11/7 = -4$

$$-\tau = -4 + 11/7$$
$$-\tau = -17/7$$
$$\tau = 17/7$$

Sustituimos $t = 17/7$ y $r = 11/7$ en 3

$$-1 + t = -3 - 3r$$
$$-1 + 17/7 = -3 - 3(11/7)$$
$$10/7 = -3 - 33/7$$
$$10/7 = -54/7 \qquad (F)$$

Las rectas no se intersectan.

Escaneado con CamScanner

③ Determina en qué punto la recta: $x = 2+t$, $y = -5+2t$, $z = 3+4t$ intersecta al plano xy

i) Vamos tomar 3 puntos en xy:

$P(2,1,0)$, $Q(1,4,0)$, $r(3,4,0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \langle 1-2, 4-1, 0-0 \rangle = \langle -1, 3, 0 \rangle = \vec{n}$

$\overrightarrow{Pr} = \langle 3-2, 4-1, 0-0 \rangle = \langle 1, 3, 0 \rangle \ \vec{m}$

ii) Vector normal:

$$\vec{m} \times \vec{n} = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} k =$$

$$= 0i - 0j + 6k = 6k$$

$\Rightarrow$ La ecuación del plano XY es: $6Z = 0$ ó $Z = 0$

iii) Sustituimos los valores x, y, z en la ecuación del plano

$Z = 0$

$3 + 4t = 0$

$t = -3/4$

Escaneado con CamScanner

v) $x = 2 + t$ $\quad$ $y = -5 + 2t$ $\quad$ $z = 3 + 4t$

$x = 2 + (-3/4)$ $\quad$ $y = -5 + 2(-3/4)$ $\quad$ $z = 3 + 4(-3/4)$

$x = 5/4$ $\quad$ $y = -5 - 3/2$ $\quad$ $z = 3 + (-3)$

$y = -13/2$ $\quad$ $z = 0$

Punto de intersección: $P_0 (5/4, -13/2, 0)$

4) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2,2,1)$ y $B(-1,1,-1)$ y es perpendicular al plano $6x + 7y + 2z = 10$

i) Vector normal del plano dado:

$$\vec{n} = \langle 6, 7, 2 \rangle$$

Vector $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = \langle -1-2, 1-2, -1-1 \rangle = \langle -3, -1, -2 \rangle$$

ii) Vector normal del plano deseado:

$$\vec{n} \times \vec{AB} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{vmatrix} 6 & 7 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} k$$

$$= -12i + 6j + 15k$$

Ec. plano: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

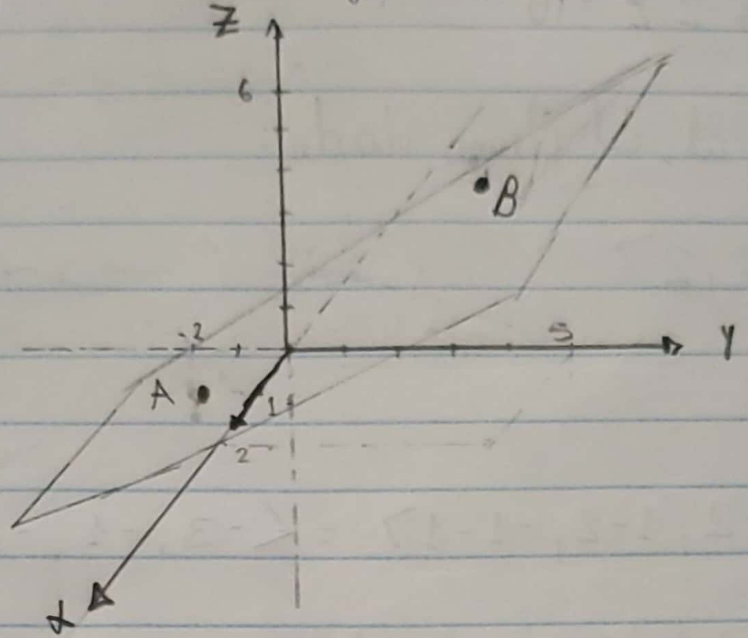
$$-12(x+1) + 6(y-1) + 15(z+1) = 0$$

$$-12x - 12 + 6y - 6 + 15z + 15 = 0$$

$$-12x + 6y + 15z - 3 = 0$$

Escaneado con CamScanner

⑤ Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-2,-1)$ y $B(2,5,6)$ y es paralelo al eje X.



i) $\overrightarrow{AB} = \langle 2-1, 5+2, 6+1 \rangle = \langle 2, 7, 7 \rangle$

Sea $\vec{n} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ un vector en el eje X

ii) $\vec{n} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} k$

$= 0i - 7j + 7k = \langle 0, -7, 7 \rangle$

iii) Ec. Plano: $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$

$0(X-1) - 7(Y+2) + 7(Z+1) = 0$

$0 - 7Y - 14 + 7Z + 7 = 0$

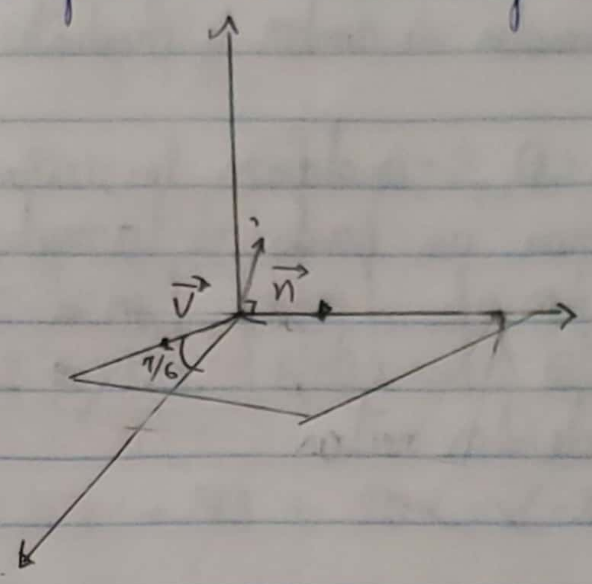
$-7Y + 7Z - 7 = 0$

$= Y + Z - 1 = 0$

$\boxed{Y - Z + 1 = 0}$

Escaneado con CamScanner

⑥ Hallar la ecuación del plano que contiene el eje y y forma un angulo de $\pi/6$ con el eje x positivo



i) Calculamos vector de rotación:

$\vec{V} = \langle \cos \pi/6 , 0 , \operatorname{sen} \pi/6 \rangle = \langle \sqrt{3}/2 , 0 , 1/2 \rangle$

Sea $\vec{n} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ un vector en el eje y

ii) $\vec{V} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} k =$

$= -1/2\, i - 0 j + \sqrt{3}/2\, k = \langle -1/2 , 0 , \sqrt{3}/2 \rangle$

Ec. Plano: $-1/2(x-0) + 0(y-1) + \sqrt{3}/2(z-0) = 0$

$-1/2 x + 0 + 0 + \sqrt{3}/2 z - 0 = 0$

$-1/2 x + \sqrt{3}/2 = 0$

$\boxed{x - \sqrt{3} = 0}$

Escaneado con CamScanner