Entdecken. Erforschen. Erkennen.

Mathe.Forscher meets GeoGebra

Parabeln

GeoGebra-Book zur Unterrichtseinheit:

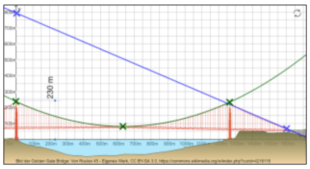
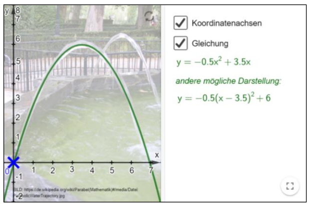
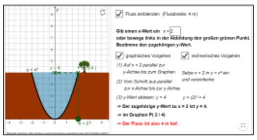
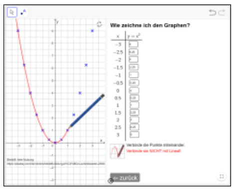
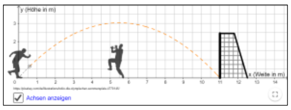
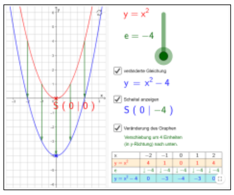
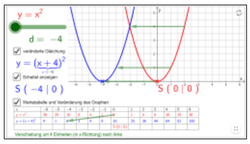
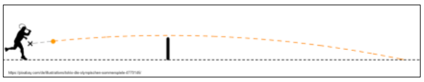
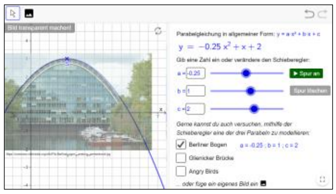
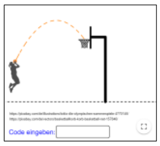
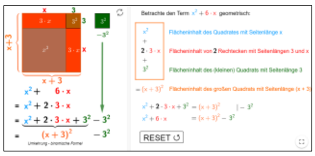
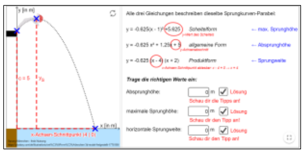
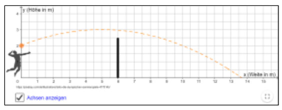
https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7

Autoren: Ingo Kneißl und Dr. Matthias Hauck

Inhaltsverzeichnis

(direkt zum Arbeitsblatt in diesem Dokument verlinkt)

GeoGebra Graspable Math LearningApps.org

In dieser Handreichung werden die Arbeitsblätter zu den Online-Aktivitäten im Gesamtüberblick vorgestellt und didaktisch eingeordnet. Zu jeder Aktivität folgt auf das Arbeitsblatt ein Erwartungshorizont mit knappen ergänzenden Hinweisen. Als Lehrkraft kann man aus den Bausteinen eine passgenaue Reihe zusammenstellen und dabei gezielt zwischen einfachem und erweitertem Niveau wählen – auch die Auswahl einzelner Bausteine ist denkbar.

Ein besonderer Dank geht an Verena Jannack, Ellen Mädche und Matthias Heidenreich: Dank eurer Hilfe hat das Projekt nochmals an Qualität gewonnen und konnte durch die vielfältigen Schüler-/Lehrer-Rückmeldungen noch besser auf die verschiedenen Anforderungen im Unterricht angepasst werden.

Ingo Kneißl und Dr. Matthias Hauck, Juli 2021

Vorwort

Das GeoGebra-Buch *„Parabeln“* wurde auf Grundlage des Bildungsplans 2016 für Gymnasien in Baden-Württemberg erstellt. Es enthält an geeigneten Stellen Vertiefungen, die über diesen Bildungsplan hinausgehen.

Durch den baukastenförmigen Aufbau des Buches ist mittels einer gezielten Auswahl der einzelnen Kapitel bzw. Aktivitäten natürlich auch eine Verwendung an jeder anderen Schulform möglich.

Die Classroom-Funktion von GeoGebra unterstützt dieses Prinzip: GeoGebra Classroom
Das Buch ist so gestaltet, dass man entweder aus den einzelnen Seiten oder auch aus dem ganzen Buch eine KLASSE ERSTELLEN kann.

Durch GeoGebra Classroom hat man als Lehrperson dann die folgenden Möglichkeiten:

- aktuellen Fortschritt der einzelnen Schülerinnen und Schüler verfolgen,
- Antworten auf MultipleChoice- oder Freitext-Aufgaben, Rechnungen und Notizen live verfolgen …
- … dadurch gezielt Probleme erkennen und individuelle Hilfestellung geben,
- die Bearbeitung zu „pausieren“,
- individuelle Lösungen (anonymisiert) der Klasse zeigen und diskutieren.

Durch GeoGebra Classroom hat man als Schülerin und Schüler dann die folgenden Möglichkeiten:

- interaktiv zu arbeiten,
- Notizen und Rechnungen (z.B. durch Stifteingabe auf den eingebetteten Whiteboards) direkt im GeoGebra-Buch durchzuführen,
- den eigenen Lernfortschritt durch diverse Übungsaufgaben überprüfen,
- das Whiteboard benutzen, um seinem Lehrer direkt Fragen zu stellen oder ein Feedback zu geben,
- das Buch und die Notizen zu speichern und jederzeit wieder aufzurufen und weiterzuarbeiten (Voraussetzung ist ein eigener GeoGebra-Account).

Das Tutorial *„Lerne GeoGebra Classroom“* (https://www.geogebra.org/m/vexj65n9 oder über den QR-Code) beantwortet alle Fragen rund um die virtuelle Classroom-Plattform und erklärt schrittweise durch Bilder und Videos das Einrichten und Benutzen von GeoGebra-Classroom.

Neben den verschiedenen GeoGebra-Applets sowie dem GeoGebra-Notizen-Whiteboard zur Stifteingabe wurden auch Applets der Plattformen https://learningapps.org/ und https://graspablemath.com/ auf verschiedenen Seiten des Buches eingebettet.

Dadurch wird ein vielfältiger, anschaulicher, greifbarer und motivierender Unterricht mit interaktiven Mathematik-Werkzeugen möglich.

Das Buch und auch einzelne Aktivitäten sind durch die Verwendung der GeoGebra-Classroom-Funktion sehr gut für Phasen des reinen ***Fernlernens*** („Home-Schooling“) geeignet. Unterstützt durch eine parallel stattfindende Videokonferenz kann die Lehrperson auch direkt mit jedem Einzelnen kommunizieren und gezielt fördern oder auch bei häufiger auftretenden Problemen live gegensteuern.

Auch im ***Präsenz-Unterricht*** kann das Buch gewinnbringend eingesetzt werden – durch die Verwendung von Tablets im Unterrichtsraum (kombiniert mit GeoGebra-Classroom) ist auch hier ein Live-Unterricht möglich, der es ermöglicht, individuell oder in Gruppen die Lerninhalte des Buches zu erarbeiten, und der es der Lehrperson erlaubt, den Fortschritt live zu verfolgen.

Auch das Konzept des ***Blended Learnings*** kann man mit dem GeoGebra-Buch „Parabeln“ verwirklichen: Einzelne Lerninhalte können von den Schülerinnen und Schülern interaktiv und eigenverantwortlich zuhause erarbeitet werden – in den Unterrichts-Präsenzphasen liegen die Schwerpunkte dann in der Aufarbeitung von Problemen und der gezielten Übung mit der Lehrperson als Experten.

Wir wünschen Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern viel Freude an unserem GeoGebra-Buch „Parabeln“.

I. Motivation – Entdeckerblatt

I.1. Einstieg – Parabeln

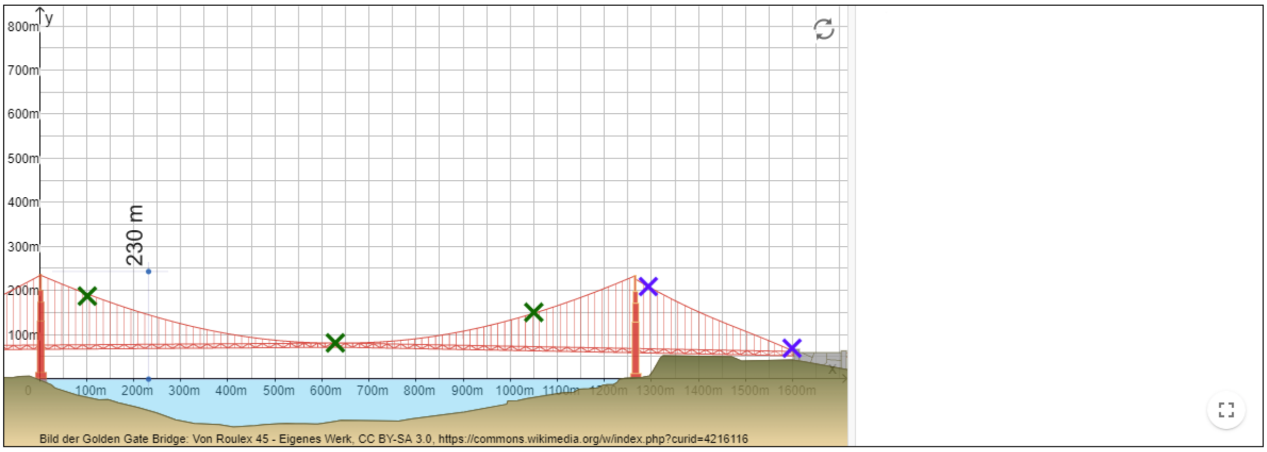
https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/jbg4chhz

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Funktionen helfen uns, Dinge in unserem Alltag berechenbar zu machen. Bisher kennst du nur lineare Funktionen („Geraden“) – durch sie können geradlinige Objekte (Kanten eines Hausdaches) und Entwicklungen (Flugzeugroute am Himmel) mathematisch beschreiben. Es gibt in unserem Alltag aber noch so viel mehr Formen.

In diesem ersten Kapitel bekommst du einen Einblick, welche Formen du in den kommenden Wochen kennenlernst und wie man diese geschickt mathematisch beschreiben und untersuchen kann.

1. Skizziere die Näherungskurven in die folgende Skizze und trage die im Applet ermittelten Gleichungen in den nebenstehenden Kasten ein.



2. Vervollständige den Lückentext.

Der Graph einer **linearen Funktion** ist eine ____________________________.

Deshalb kann das Trägerseil Richtung Landseite durch eine lineare Funktion mit ____________________________ beschrieben werden.

Für die Beschreibung des ____________________________ in der Mitte der Brücke jedoch sind Geraden ungeeignet. Dafür braucht man einen anderen Funktionstyp:

Bei der ermittelten Vorschrift ____________________________ kommt die Variable im ____________________________ vor.

Man nennt diese Funktion deshalb **quadratische Funktion**.

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**.

3. Forscherfrage

Füge bei Arbeitsauftrag 3 mindestens ein eigenes Bild einer Parabel und/oder einer Geraden ein und ermittle deren Funktionsgleichungen. Folge dafür den Anweisungen in der Aufgabe. Falls möglich, erstelle einen Screenshot, drucke diesen ggf. aus und hefte ihn (gerne auch digital) an diese Seite.

I. Motivation – Lehrerblatt

I.1. Einstieg – Parabeln

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/jbg4chhz

Die Applets ermöglichen einen forschenden und motivierenden Einstieg in das Thema „*Parabeln*“. Grundlagen zum Thema Modellierung werden gelegt – erste Schritte hin zur Funktionsuntersuchung unternommen. Der gewählte realitätsnahe Einstieg erleichtert die Vorstellung und das Verständnis dieses wichtigen Themenbereichs der Mathematik.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

1. Näherungskurven und ermittelten Gleichungen

Abzeichnen der Parabel und Geraden aus dem Applet – Ergänzen der Parabel-/Geradengleichung (siehe auch: Gleichungen im Lückentext)

2. Vervollständige den Lückentext.

Der Graph einer **linearen Funktion** ist eine *Gerade*. Deshalb kann das Trägerseil Richtung Landseite durch eine lineare Funktion mit $y \approx -0{,}5 \cdot x + 825$ beschrieben werden.

Für die Beschreibung des *Trägerseils* in der Mitte der Brücke jedoch sind Geraden ungeeignet. Dafür braucht man einen anderen Funktionstyp: Bei der ermittelten Vorschrift $y \approx 0{,}0004 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 230$ kommt die Variable im *Quadrat* vor.

Man nennt diese Funktion deshalb **quadratische Funktion**. Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**.

3. Forscherfrage

Individuelle Lösungen mit der Handy-/Tablet-Kamera

Weitere mögliche Entdeckerthemen, die sich zum Diskutieren anbieten:

- Modelliere die Fahrbahn oder einen Brückenpfeiler mithilfe der blauen Kurve. *(Sonderfälle der Geraden entdecken / Wiederholen - auch die Gleichung der Achsen entdeckbar)*
- Versuche dasselbe mit der grünen Kurve. *Annäherung der drei grünen Punkte an eine Parallele zu Vorfaktor von $x^2 \rightarrow 0$ ... Parabel wird breiter (Vorstellung des Streckfaktors angeregt + Grundidee, dass a nicht 0 sein darf ... sonst ja Gerade und keine Parabel mehr)*
- Finde weitere "einfache" Parabeln oder Geraden beim Verschieben deiner Punkte.
- Findest du auch Sonderfälle bei der grünen Kurve? Keine Parabel möglich oder drei Punkte liegen auf einer Geraden.
- Nähere die grüne Kurve in der Umgebung des y-Achsenabschnitts durch die blaue Gerade an. *Die blaue Gleichung entspricht der oberen grünen Gleichung, wenn man dort den Term mit x^2 weglässt („Verhalten nahe 0“).*
- Kann man denn wirklich alle Abbildungen von oben mit Parabeln annähern? *Manche Abbildungen lassen sich eher durch Kettenlinien annähern (z.B. Gateway Arch), andere Abbildungen sind perspektivisch verzerrt (Ketten-Absperrung)*

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

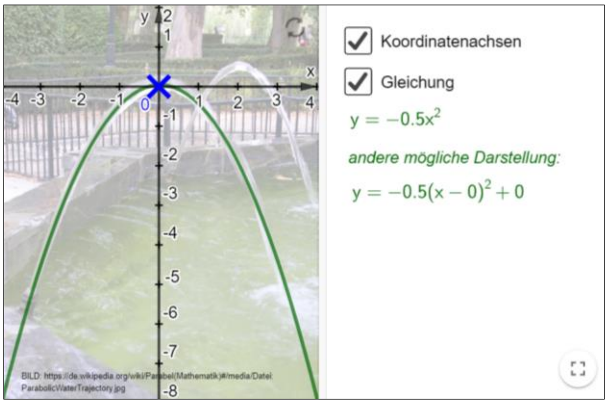
I.2. Exkurs – Modellierung – Entdeckerblatt

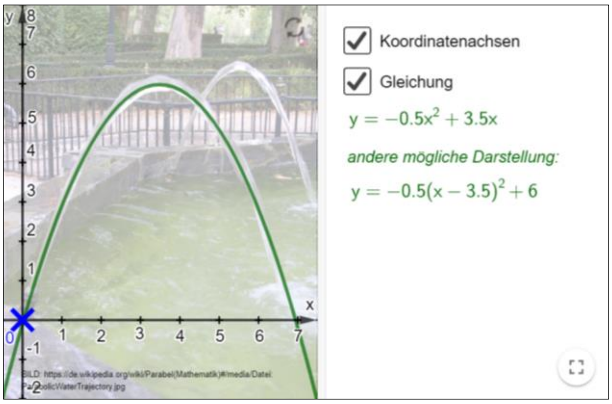
https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/ppq6fjss

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Im Folgenden findest du zwei mögliche Lagen Bild I und Bild II für den Ursprung eines Koordinatensystems im Fall für die Beschreibung des Wasserstrahls in einem Brunnen.

a) Notiere jeweils unter die Abbildungen die Vor- bzw. Nachteile der gewählten Lage des Ursprungs.





b) Entscheide, welche Wahl findest du sinnvoller findest. Begründe deine Antwort entsprechend.

I.2. Exkurs – Modellierung – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/ppq6fjss

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Eine Modellierung einer Kurve mithilfe einer Parabel beginnt nahezu immer mit der Frage: *„Wo platziere ich sinnvoll den Ursprung des Koordinatensystems?“*

Die Schülerinnen und Schüler sollen forschend erkennen, dass es DIE eindeutige „richtige“ Antwort auf diese Frage nicht gibt – jede Wahl hat in Abhängigkeit von der Aufgabenstellung Vor- aber auch Nachteile.

a) Notiere jeweils unter die Abbildungen die Vor- bzw. Nachteile der gewählten Lage des Ursprungs.

Vorteile:

- einfache Parabelgleichung
- Graph liegt achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Der höchste Punkt der Parabel liegt im Ursprung.

Nachteile:

- Die x-Achse bildet nicht die Wasseroberflächen-Linie.
- Verändert sich der Verlauf des Wasserstrahls (z.B. durch geringeren Druck), ist die Lage des Ursprungs nicht mehr sinnvoll → Kordinatensystem nicht für verschiedene Kurven geeignet.

Vorteile:

- Die x-Achse bildet die Wasseroberflächen-Linie (Weite des Strahls 7 LE direkt ablesbar).
- Höhe des Wasserstrahls 6 LE direkt am y-Wert des höchsten Punktes ablesbar.
- Auch wenn sich der Verlauf des Wasserstrahls ändert, kann man die neue Parabel direkt im Koordinatensystem ergänzen und untersuchen.

Nachteile:

- Keine einfache Symmetrie der Pararabel
- Parabelgleichung komplexer
- Rechenwege komplexer

b) Entscheide, welche Wahl findest du sinnvoller findest. Begründe deine Antwort entsprechend.

Individuelle Lösungen/Ansichten können hier diskutiert werden. Betrachtet man nur den Rechenaufwand und verzichtet auf die Darstellung verschiedener Kurven in einem einzigen Koordinatensystem, ist sicherlich die linke Darstellung geeigneter. Möchte man mehrere Kurven zeichnen oder auch Werte, wie die Breite oder die Höhe des Wasserstrahls, direkt ablesen, ist man bei der rechten Variante gut aufgehoben.

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

II. Die Normalparabel – Entdeckerblatt

II.1. Die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/u5rjc9bh

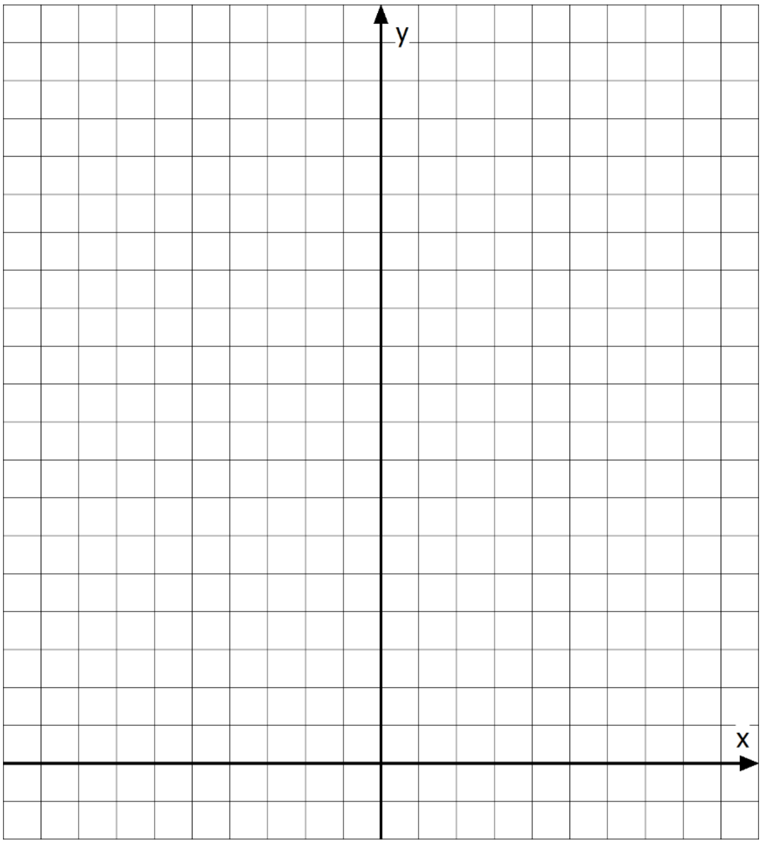
Fülle die Wertetabelle für die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ aus und skizziere mithilfe der Wertepaare den Graphen im Koordinatensystem unten.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Wertetabelle:

x	y
-3	
$-2{,}5$	
-2	
$-1{,}5$	
-1	
$-0{,}5$	
0	
$0{,}5$	
1	
$1{,}5$	
2	
$2{,}5$	
3	

Graph:



Markiere den Scheitelpunkt der Normalparabel und nenne mindestens zwei Eigenschaften, die direkt am Graphen abzulesen sind.

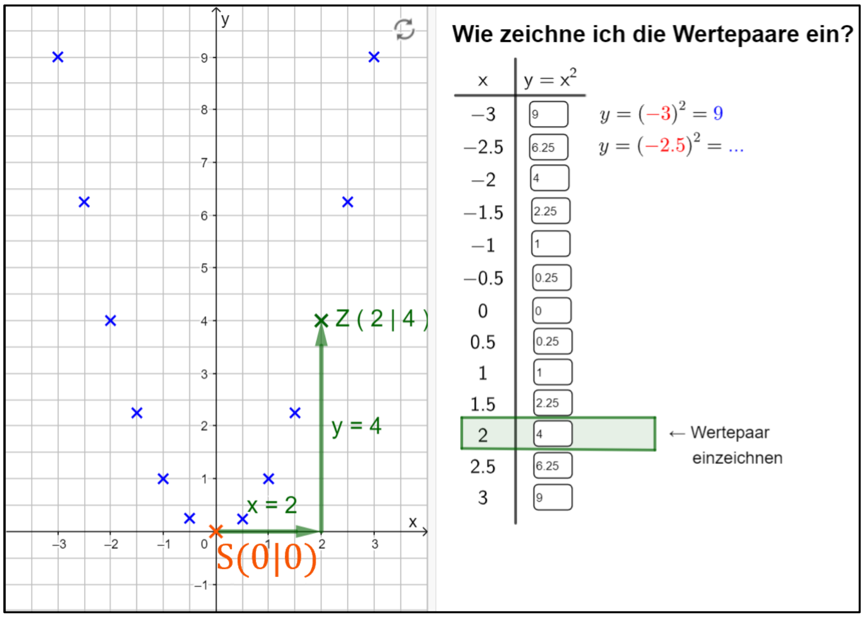
II. Die Normalparabel – Lehrerblatt

II.1. Die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/u5rjc9bh

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Das Erstellen von Wertetabellen ist grundlegend für die Mathematik. Zusammen mit der Kompetenz, diese Wertepaare in ein Koordinatensystem zu übertragen, erlaubt es den Schülerinnen und Schülern, Graphen von Funktionen darzustellen, sich „ein Bild zu machen“ von mathematischen Zusammenhängen und im Graphen Eigenschaften direkt zu „erkennen“.



Mögliche Schwerpunkte / Problemstellen bei der Erstellung von Wertetabelle und Graph sind in der Abbildung oben ebenfalls aufgeführt.

Eigenschaften der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$:

Diese Normalparabel ist nach oben geöffnet. Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Diese Normalparabel besitzt einen tiefsten Punkt mit den Koordinaten $S(0|0)$. Alle weiteren Punkte der Parabel liegen oberhalb der x-Achse.

Nach den linearen Funktionen und ihren Graphen (den Geraden) ist die Normalparabel der erste „gebogene“ Graph.

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

II.2. y-Wert bei gegebenem x-Wert – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/zjzaqnkd

a) Bearbeite die Seite im GeoGebra-Buch und beschreibe das Vorgehen mit eigenen Worten.
b) Denke dir einen x-Wert und berechne selbst den zugehörigen y-Wert der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$
c) Stelle die Aufgabe deiner Nachbarin / deinem Nachbarn – bearbeite selbst ihre / seine Aufgabe.
Als Hilfe / Kontrolle kannst du das Applet oder deinen Taschenrechner benutzen.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Bemerkung zum Arbeitsauftrag 2:
Graspable Math macht Mathematik für dich „greifbar". Solltest du mit diesem Programm noch nicht zurechtkommen, hilft dir die Schnell-Einführung in ***I.3. Werkzeuge für dieses Buch*** (https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/pmqa578p).

II.3. x-Wert bei gegebenem y-Wert

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/q9nwhunj

a) Bearbeite die Seite im GeoGebra-Buch und beschreibe das Vorgehen mit eigenen Worten.
b) Denke dir einen y-Wert und berechne selbst den/die zugehörigen x-Wert/e der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$
c) Stelle die Aufgabe deiner Nachbarin / deinem Nachbarn – bearbeite selbst ihre / seine Aufgabe.
Als Hilfe / Kontrolle kannst du das Applet oder deinen Taschenrechner benutzen.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

II.4. Zusammenfassung

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/ge8yzszu

Das Applet fasst das Kapitel zusammen und kann dir im Laufe des Buches helfen, bei einer Aufgabe x- oder y-Wert zu finden und/oder zu überprüfen, ob ein Punkt auf einer Parabel liegt („*Punktprobe*") oder nicht.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Überprüfe dein Wissen mithilfe der Übungsaufgabe – ihr könnt auch live gegeneinander spielen.

II.2. y-Wert bei gegebenem x-Wert – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/zjzaqnkd

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Mit den folgenden drei Seiten des GeoGebra-Buches sollen die Schülerinnen und Schüler die grundlegende Vorgehensweise zum Ermitteln von x- Wert bei gegebenem y-Wert (und umgekehrt) erkunden und nachvollziehen.

Hier wird auch das erste Mal mit der Plattform Graspable Math gearbeitet – im Kapitel I.3. findet sich ein Tutorial dafür. Da diese Applets die Mathematik im wahrsten Sinne des Wortes greifbar und auf eine weitere, andere Art erlebbar machen, bietet sich auch eine gemeinsame Erkundung von Graspable Math im Rahmen des Kapitels I.3. (https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/pmqa578p) an.

a) Man quadriert den gegebenen x-Wert und erhält somit den gesuchten y-Wert. Achte dabei darauf, bei negativen Zahlen eine Klammer um die Basis zu setzen.

b) individuelle Lösung, z.B. $x = -3 \rightarrow y = (-3)^2$

c) individuelle Lösung

Die Aufgabenteile b) und c) unterstützen das kooperative Arbeiten – das Applet hilft den Schülerinnen und Schülern dabei, die Lösungen ihrer individuell erstellten Aufgabe (und auch die Aufgabe der Mitschülerinnen und Mitschüler) zu überprüfen.

II.3. x-Wert bei gegebenem y-Wert

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/q9nwhunj

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Diese Seite des Buches bietet der Lehrkraft die Möglichkeit bereits propädeutisch das graphische Lösen einer rein quadratischen Gleichung zu thematisieren und einzelne Rechenschritte –mit der visuellen Unterstützung – nachvollziehbar zu erklären. Auch die Fallunterscheidung bei den Lösungen einer rein quadratischen Gleichung wird in diesem Anwendungsbeispiel „sichtbar“. Dem typischen Fehler, bei zwei Lösungen die negative Lösung zu vergessen, kann bereits hier entgegengewirkt werden.

a) Bei gegebenen y–Wert erhält man den zugehörigen x–Wert durch („Quadrat“-)Wurzelziehen. Man erhält keine, genau eine oder sogar zwei Lösungen für x.

b) $y = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{} \quad \rightarrow \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

c) individuelle Lösung

II.4. Zusammenfassung

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/ge8yzszu

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Die Seite fasst die wichtigsten Erkenntnisse zur Normalparabel und die Berechnung von x-/y-Werten zusammen.
Das „Pferderennen“ kann im Mehrspieler-Modus auch zeitgleich auf verschiedenen Geräten gegeneinander gespielt werden und wird so von einer einfachen Übung zu einem motivierenden Wettkampf.

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

III. Normalparabeln im Koordinatensystem verschieben – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/w2x6mkkv

III.1. Normalparabeln ______________________________________:

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Gegeben sind die Normalparabeln mit den Gleichungen

$$f: y = x^2 + 2 \quad \text{und} \quad g: y = x^2 - 1.$$

a) Gib eine Vermutung an, welche Auswirkungen diese Veränderung der Parabelgleichung auf die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ hat.
Formuliere die Auswirkungen allgemein und ergänze oben in der Lücke die Überschrift für das Kapitel III.1. sinnvoll.

b) Erstelle jeweils eine Werte-Tabelle für f und g und skizziere die entsprechenden Graphen.

MATHE.FORSCHER Entdecke Mathematik in deiner Welt

Entdecken. Erforschen. Erkennen.

III. Normalparabeln im Koordinatensystem verschieben – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/w2x6mkkv

III.1. Normalparabeln in y-Richtung verschieben:

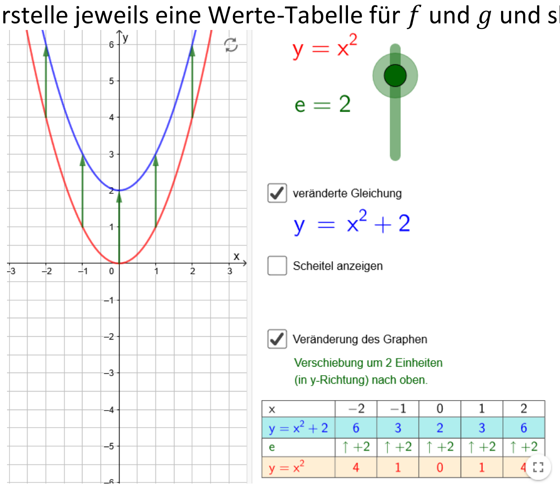
QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

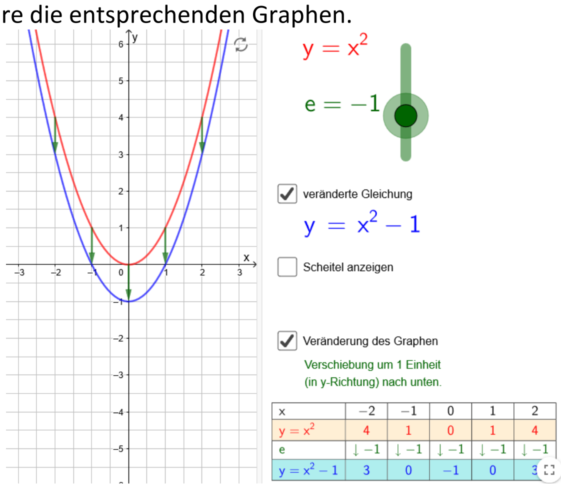
Das GeoGebra-Applet erlaubt es den Schülerinnen und Schülern sowohl visuell im Graphen als auch mit Parabelgleichung und Wertetabelle die Auswirkungen der Veränderung in der Parabelgleichung nachzuvollziehen. Der Lückentext kann als Zusammenfassung verwendet und als Screenshot ins digitale „Heft“ oder durch Abschreiben ins analoge „Heft“ bei Bedarf übertragen werden. Eine Zusammenfassung beider Verschiebungsrichtungen samt Ergebnissicherung folgt auf dem übernächsten Arbeitsblatt.

Auch wenn das Verschieben in y-Richtung und dabei vor allem die Auswirkungen des Rechen-/Vorzeichens in der Regel weniger Probleme verursacht als das Verschieben in x-Richtung kann bereits auf dieser Buch-Seite mit dem Graspable Math -Applet als weitere Visualisierungsmöglichkeit gearbeitet werden. Der Aufbau der Seite wiederholt sich bewusst auf der Folge-Seite zur Verschiebung in x-Richtung.

a) Die Normalparabel wird in y-Richtung verschoben:
f: um 2 Einheiten nach oben
g: um 1 Einheit nach unten
Die Verschiebung entspricht dem Betrag des Parameters.
Die Richtung ergibt sich aus dessen Vorzeichen.

b) Erstelle jeweils eine Werte-Tabelle für f und g und skizziere die entsprechenden Graphen.





Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

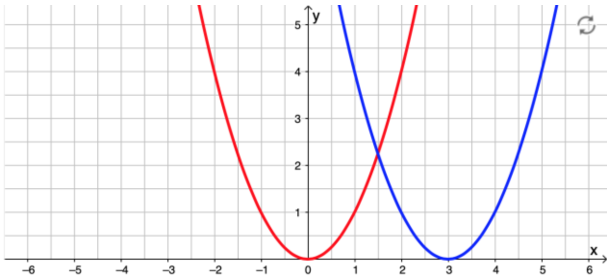
III.2. Normalparabeln in x-Richtung verschieben – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/tdbwjrue

Im Folgenden wird die rote Normalparabel mit Scheitel $S\ (\ 0\ |\ 0\ )$ und Gleichung $y = x^2$ parallel zur x-Achse verschoben. Es entsteht die blaue Normalparabel. Gib jeweils eine Gleichung für diese blaue Normalparabel an.

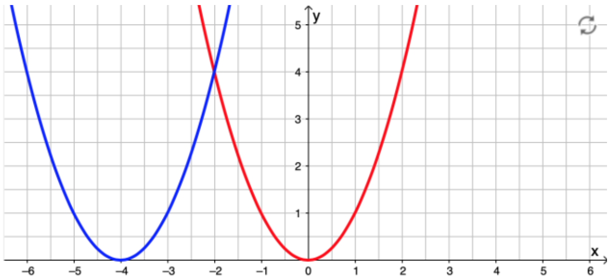
QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Parabel 1:



Gleichung der blauen Normalparabel:

Parabel 2:



Gleichung der blauen Normalparabel:

III.3. Normalparabeln im Koordinatensystem verschieben

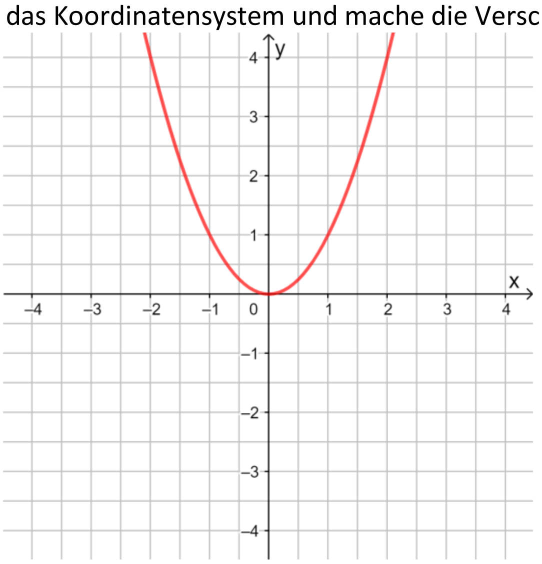
https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/hh9jtxwe

Gegeben ist die Parabelgleichung $y = (x - 2)^2 + 1$.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

a) Beschreibe, wie der Graph dieser Parabel aus der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ hervorgeht.

b) Skizziere diese Parabel in das Koordinatensystem und mache die Verschiebungen farblich deutlich.



Überprüfe abschließend deine Vermutung mit Hilfe des Applets im GeoGebra-Buch.

III.2. Normalparabeln in x-Richtung verschieben – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/tdbwjrue

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Erfahrungsgemäß stellt die Verschiebung in x-Richtung eine größere Schwierigkeit dar als eine Verschiebung in y-Richtung. Gerade das Rechen-/Vorzeichen wird oft verwechselt.
Das GeoGebra-Applet ermöglicht den Schülerinnen und Schülern sowohl visuell im Graphen als auch mit Parabelgleichung und Wertetabelle dieser vermeintlichen Fehlvorstellung von Anfang an entgegenzuwirken. Auch das Graspable Math-Applet soll dabei nochmal auf eine andere Weise unterstützen.

Parabel 1: $y = (x-3)^2 = (x-(+3))^2$ | **Parabel 2:** $y = (x+4)^2 = (x-(-4))^2$

Gerade bei Parabel 2 bietet sich als Ergänzung die zweite Schreibweise an. Auf diese Weise kann man am Vorzeichen des Parameters d immer die Verschiebungsrichtung direkt ablesen. Diese didaktische Überlegung wird auch auf der nächsten Buchseite III.3. im GeoGebra-Applet besonders hervorgehoben als zusätzliche Darstellung.
Ebenso folgt an dieser Stelle eine Zusammenfassung samt Sicherung der bisherigen Erkenntnisse.

III.3. Normalparabeln im Koordinatensystem verschieben

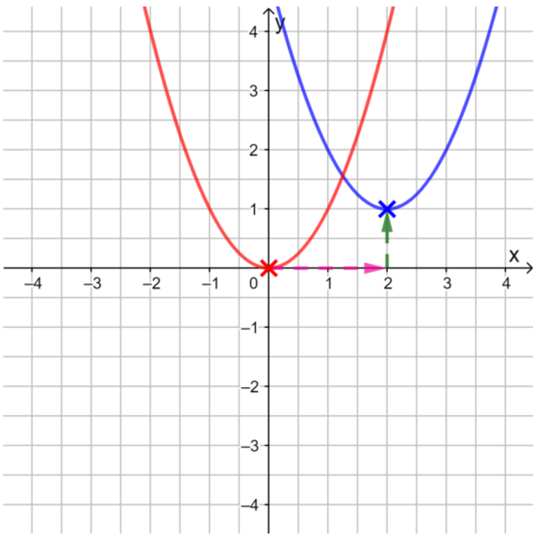
https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/hh9jtxwe

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Die Aufgabe fasst die Verschiebung in y- und x-Richtung zusammen. Die Schülerinnen und Schüler müssen ihre Erkenntnisse sowohl verbal formulieren als auch graphisch darstellen.

a) $y = (x-2)^2 + 1 = (x-(+2))^2 + 1$
Die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ wird um 2 Einheiten (in x-Richtung) nach rechts und um 1 Einheit (in y-Richtung) nach oben verschoben.

b) Koordinatensystem:



Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

<u>III.3. Zusammenfassung – Normalparabeln im Koordinatensystem verschieben</u> – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/hh9jtxwe

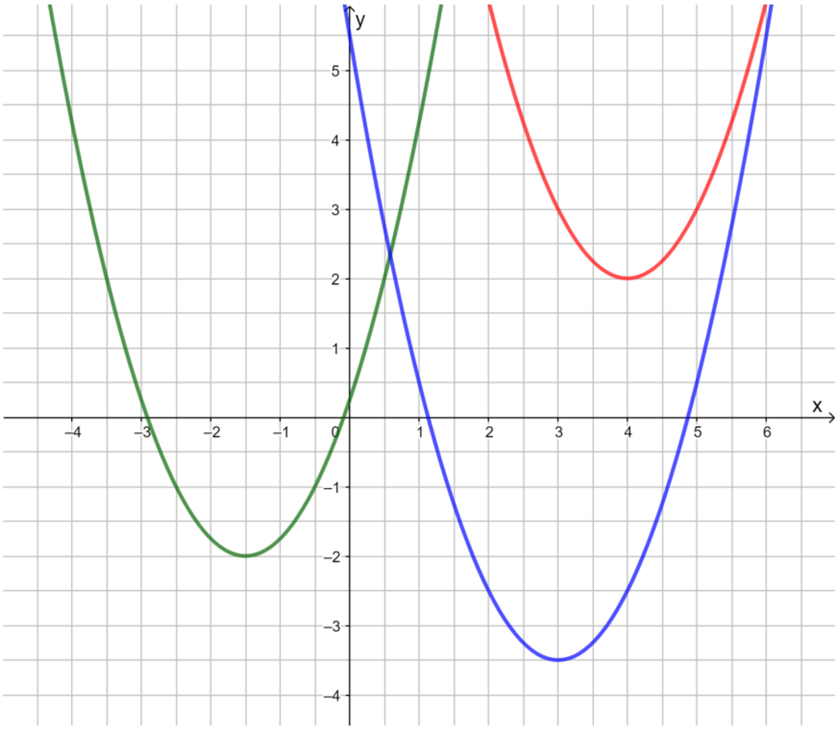
Die allgemeine Gleichung einer verschobenen Normalparabel lautet $y = (x - d)^2 + e$.

Beschreibe in eigenen Worten, welchen Einfluss die Parameter d und e auf die Normalparabel $y = x^2$ im Koordinatensystem haben.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

<u>Aufgabe:</u>

Gib die Gleichungen der abgebildeten Normalparabeln an.



rot: ____________________ grün: ____________________ blau: ____________________

<u>III.3. Zusammenfassung – Normalparabeln im Koordinatensystem verschieben</u> – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/hh9jtxwe

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Der interaktive Lückentext fasst die Erkenntnisse über den Einfluss der Parameter d und e auf die verschobene Normalparabel mit der Gleichung $y = (x - d)^2 + e$ zusammen.
Die Beschreibung in eigenen Worten soll das Verständnis vertiefen und wiederholen.
Auch die ersten Überlegungen zum Scheitel sind hier (vor der „Scheitelform“) bereits denkbar und sicherlich sinnvoll.
Folgende Formulierung ist denkbar:
Die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ und Scheitel $S\ (\ 0 \mid 0\ )$ wird um d Einheiten in x-Richtung und um e Einheiten in y-Richtung verschoben.
Dadurch verändert sich die Gleichung der Normalparabel und die Koordinaten des Scheitelpunktes.
Sie lauten dann: $y = (x - d)^2 + e$ und $S\ (\ d \mid e\ )$

Neben dem Lückentext bietet die zusammenfassende GeoGebra-Seite drei Möglichkeiten der interaktiven Übung:

Übung 1: Ablesen der Gleichung der abgebildeten Normalparabel – zusätzlich motiviert durch einen High-Score-Zähler.

Übung 2: Zuordnung passender Graphen, Scheitel (propädeutisch bereit hier vor der „Scheitelform“), Formulierungen, Parabelgleichungen

Übung 3: Auswählen der korrekten Parabelgleichung (vor allem wichtig zur Festigung der Erkenntnisse und Vermeidung der möglichen Rechen-/Vorzeichenfehler bei der Verschiebung in x-Richtung)

Die „analoge“ Übung auf der Schülerhandreichung schließt das Kapitel ab. Die Werte sind bewusst so gewählt, dass ein Probieren im GeoGebra-Applet nicht direkt die Lösung erzeugen kann – dennoch hilft das Applet bei der Bearbeitung, vor allem bei der Überprüfung der Vor-/Rechenzeichen in der Gleichung.

<u>Aufgabe:</u>
Gleichungen der abgebildeten Normalparabeln:

rot: $y = (x - 4)^2 + 2$ grün: $y = (x + 1{,}5)^2 - 2$ blau: $y = (x - 3)^2 - 3{,}5$

Auch an dieser Stelle ist es möglich, für schwächere Schülerinnen und Schüler nochmals die ausführliche Schreibweise zu ergänzen:

$y = (x - (+4))^2 + 2$ $y = (x - (-1{,}5))^2 - 2$ $y = (x - (+3))^2 - 3{,}5$

Auch das Ablesen / Einzeichnen der Scheitelkoordinaten und Vergleichen mit der Gleichung der Normalparabeln kann hier zusätzlich zum Verständnis beitragen und das Thema „Scheitelform“ vorentlasten.

$S\ (\ 4 \mid 2\ )$ $S\ (\ -1{,}5 \mid -2)$ $S\ (\ 3 \mid -3{,}5)$

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

IV. Form einer Parabel verändern – Entdeckerblatt

IV.1. Parabeln spiegeln und strecken

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/cn9npnzr

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Erläutere kurz, warum es manchmal sinnvoll ist, eine Parabel in y-Richtung zu strecken.

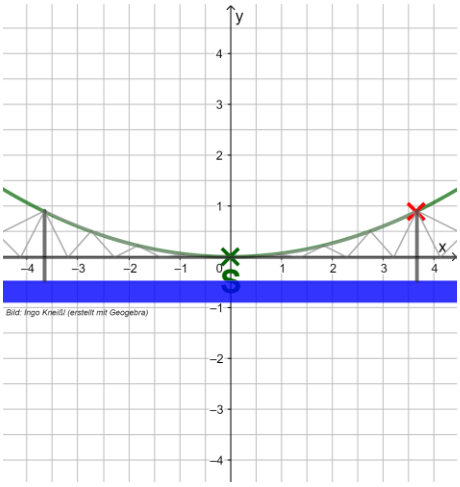
Überlege dir, wann es sinnvoll ist, eine Parabel an der x-Achse zu spiegeln.

Begründe, warum ist es nicht sinnvoll, Parabeln mit Scheitel $S\ (\ 0\ |\ 0\ )$ an der y-Achse zu spiegeln.

Beschreibe, woran man bei einer Parabelgleichung erkennen kann, ob die Parabel breiter oder enger als die entsprechende Normalparabel ist bzw. ob die Parabel an der x-Achse gespiegelt wurde.

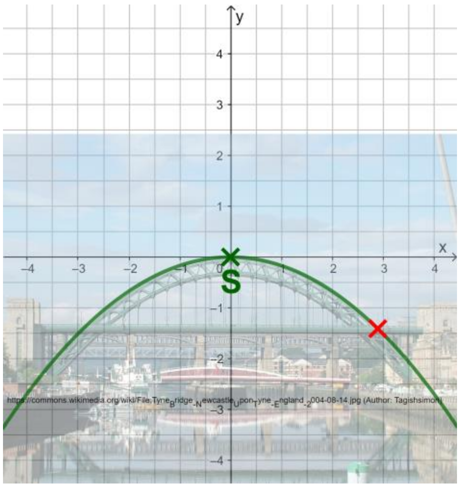
Aufgabe:

a) Gegeben sind die folgenden gestreckten Parabeln. Gib den Streckfaktor näherungsweise sowie eine mögliche Parabelgleichung an:



Streckfaktor: ________________________

Parabelgleichung: ________________________



Streckfaktor: ________________________

Parabelgleichung: ________________________

Überprüfe deine Vermutung mit Hilfe des Applets im GeoGebra-Buch.

b) Untersuche (zunächst ohne Applet), welche Auswirkungen sich auf den Graphen ergeben, wenn der rote Punkt in obigen Graphen auf der x- bzw. auf der y-Achse liegen würde.

IV. Form einer Parabel verändern – Lehrerblatt

IV.1. Parabeln spiegeln und strecken

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/cn9npnzr

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Nachdem im Kapitel III nahezu vollständig auf offene mathematische Modellierung verzichtet wurde, wird unmittelbar zu Beginn des Kapitels IV. die forschende Aufgabe vom Beginn des Buches (Foto einfügen) nochmal aufgegriffen. Da nun (hoffentlich) ein Mehrwissen bei den Schülerinnen und Schülern vorliegt, kann nun mathematisch vertieft und argumentiert werden.

Lösungsvorschläge:
Erläutere kurz, warum es manchmal sinnvoll ist eine Parabel in y-Richtung zu strecken.
Mögliche Antwort: Es gibt viele Objekte, die zwar eine Parabelform besitzen (z.B. Hängebrücken) aber nicht exakt der Normalparabel entsprechen. Um diese mathematisch korrekt beschreiben zu können, ist es sinnvoll, zunächst den Scheitelpunkt als Koordinatenursprung zu wählen (vergleiche I.2. Modellierung) und anschließend die Form der Normalparabel zu verändern – die Parabel in y-Richtung zu strecken.

Überlege dir, wann es sinnvoll ist, eine Parabel an der x-Achse zu spiegeln.
Reale Kurven sind manchmal auch nach unten geöffnet (z.B. Brücken, Wurf eines Balls, …).

Begründe, warum ist es nicht sinnvoll, Parabeln mit Scheitel $S\ (\ 0 \mid 0\ )$ an der y-Achse zu spiegeln.
Da die Parabel achsensymmetrisch zur y-Achse ist, würde eine Spiegelung keine Veränderung der Kurve bewirken. In diesem Fall wäre das Spiegelbild identisch mit der ursprünglichen Parabel.

Beschreibe, woran man bei einer Parabelgleichung erkennen kann, ob die Parabel breiter oder enger als die entsprechende Normalparabel ist bzw. ob die Parabel an der x-Achse gespiegelt wurde.
Betrachtet man eine Parabel der Form $y = a \cdot x^2$, so entscheidet der Koeffizient vor dem Ausdruck x^2 darüber, ob die Parabel breiter oder enger ist als die Normalparabel.

Für $0 < a < 1$ ist die Parabel breiter als die Normalparabel.

Ist $a > 1$ ist die Parabel enger als die Normalparabel.

Für negative a bildet man den Betrag von a und kann die obigen Folgerungen übernehmen. Die Parabel ist in diesem Fall dann nach unten geöffnet.

Aufgabe:
a) Lösungsvorschläge

Streckfaktor: $a \approx 0{,}07$
Parabelgleichung: $y \approx 0{,}07 \cdot x^2$

Streckfaktor: $a \approx -0{,}17$
Parabelgleichung: $y \approx -0{,}17 \cdot x^2$

b) Untersuche (zunächst ohne Applet), welche Auswirkungen sich auf den Graphen ergeben, wenn der rote Punkt in obigen Graphen auf der x- bzw. auf der y-Achse liegen würde.
Die Kurve wäre keine Parabel mehr, sondern eine Gerade.
Roter Punkt auf x–Achse: Man erhält die Gleichung der x–Achse $y = 0$.
Roter Punkt auf y–Achse: Man erhält die Gleichung der y–Achse $x = 0$.

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

IV.2. Den Streckfaktor a rechnerisch und zeichnerisch bestimmen – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#materia/hgmcfxbc

Das Graspable Math-Applet hilft dir, schrittweise nachzuvollziehen, wie man den Steckfaktor ***rechnerisch*** bestimmen kann. Dies wird im Folgenden noch einmal explizit an einem Beispiel vorgerechnet.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Beispiel-Aufgabe:
Gesucht ist die Gleichung der Parabel, die den Scheitelpunkt $S\ (\ 0\ |\ 0\ )$ besitzt und auf der der Punkt $P\ (\ 3\ |-\ 18\ )$ liegt.

Beschreibe nun in eigenen Worten die Vorgehensweise bei den einzelnen folgenden Rechenschritten:

$$y = a \cdot x^2$$

$$-18 = a \cdot 3^2$$

$$a = \frac{-18}{9} = -2$$

$$y = -2 \cdot x^2$$

Den Wert des Streckfaktors a kann man nicht nur rechnerisch bestimmen. Formuliere die Vorgehensweise zur ***graphischen*** Ermittlung des Streckfaktors in Worten. Das GeoGebra-Applet hilft dir dabei.

Für Formel-Liebhaber:
Für eine in y-Richtung gestreckte Parabel mit Scheitel $S\ (\ 0\ |\ 0\ )$ und Gleichung $y\ =\ a \cdot x^2$ kann der Wert des Streckfaktors a in der Parabelgleichung auch mit Hilfe der folgenden Formel berechnet werden: $a = \frac{y_P}{{x_P}^2}$
Dabei ist $P(x_P|y_P)$ ein Punkt auf dieser Parabel.

Auftrag:
Markiere in der ausführlichen Lösung der Beispiel-Aufgabe oben den Teil, an der man diese Formel bereits erahnen kann, und berechne mit der ausführlichen und der vereinfachten Formel jeweils erneut den Streckfaktor aus obiger Beispielaufgabe.

IV.2. Den Streckfaktor a rechnerisch und zeichnerisch bestimmen – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/hgmcfxbc

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Bei der Vorgehensweise zur rechnerischen Bestimmung des Streckfaktors wiederholt sich die Idee der „*Punktprobe*“ aus Kapitel II. x- und y-Wert sind gegeben und können eingesetzt werden. Da die einzelnen Rechenschritte bis auf die Zahlen immer dieselben sind, bietet sich hier eine Beispiel-Musteraufgabe an. Die Vorgehensweise in eigenen Worten könnte zum Beispiel lauten:

$y = a \cdot x^2$	*allgemeine Form der Parabelgleichung aufschreiben*
$-18 = a \cdot 3^2$	*Einsetzen der Koordinaten des Punktes P*
$\boxed{a = \frac{-18}{9} = -2}$	*Auflösen der Gleichung nach a*
$y = -2 \cdot x^2$	*Einsetzen des Wertes von a in die Parabelgleichung*

Die ***graphische*** Ermittlung des Streckfaktors ist im GeoGebra-Applet bereits farblich vorbereitet. Die Vorgehensweise in eigenen Worten könnte zum Beispiel lauten:

Um einen Punkt auf der nach oben geöffneten Normalparabel zu finden, geht man vom Scheitel aus in x-Richtung 1 Einheit nach rechts (oder auch nach links) und anschließend $1^2 = 1$ Einheit in y-Richtung nach oben. Verändert man den Wert des Streckfaktors a einer Parabel mit $y = a \cdot x^2$, so kann man dessen Wert ebenso bestimmt werden: Geht man vom Scheitel aus in x-Richtung 1 Einheit nach rechts (oder auch nach links) und anschließend $a \cdot 1^2 = a$ Einheiten in y-Richtung nach oben. Dadurch ist der Wert von a direkt ablesbar.

Sollte der y-Wert nicht genau ablesbar sein, kann man die Grundidee auch weiterführen – sie führt auf die Formel. Formt man die Gleichung der Parabel nach a um: $y = a \cdot x^2 \leftrightarrow a = \frac{y}{x^2}$ ($x \neq 0$ aufgrund der Vorgehensweise gewährleistet) und verknüpft die oben beschrieben Idee mit dem „Start“ im Scheitel, ergibt sich: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{y_P - y_S}{(x_P - x_S)^2}$

Für Formel-Liebhaber:

Die Formel ist bereits in der Beispielrechnung erkennbar (→ roter Kasten). Ersetzt man oben in der Beispielaufgabe die entsprechenden Zahlen durch x_P bzw. y_P und führt die Rechenschritte gemäß der Vorgehensweise oben durch, erhält man die Formel. Auf diese Weise kann man (unterstützt von Farben) die Formel plausibel machen.

Ziel soll allerdings nicht die Herleitung sondern die Benutzung der Formel sein. Eingesetzt ergibt sich: $a = \frac{-18}{3^2} = -2$

(vorbereitend ist hier auch schon die ausführlichen Darstellung denkbar: $a = \frac{-18-0}{(3-0)^2} = -2$)

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

V. Die Scheitelform einer Parabelgleichung – Entdeckerblatt

V.1. Die Parameter der Scheitelform erkunden

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/tn2vcbrb

Die Normalparabel mit Scheitel $S\ (\ 0\ |\ 0\ )$ und der Gleichung $y\ =\ x^2$ wurde in den vorherigen Kapiteln im Koordinatensystem durch die Einführung der Parameter d und e verschoben sowie entlang der y-Achse durch den Faktor a gestreckt.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Kombiniert man diese Veränderungen des Graphen, so erhält man für $a\ \neq\ 0$ die ***Scheitelform einer Parabel mit Scheitelpunkt*** $S(\ d\ |\ e\ )$:

$$y = a \cdot (x - d)^2 + e$$

Aufgabe:

Gib jeweils die Koordinaten des Scheitelpunktes an. Beschreibe außerdem, wie die folgenden Parabeln aus der Normalparabel mit der Gleichung $y\ =\ x^2$ durch Verschiebung beziehungsweise Streckung / Spiegelung hervorgehen. Achte auf eine korrekte Reihenfolge.

a) $y = (x + 5)^2 - 3$

b) $y = 2 \cdot (x - 3)^2 + 4$

c) $y = -2 \cdot (x - 1)^2$

d) $y = \frac{1}{5} \cdot x^2 - \frac{3}{4}$

e) $y = -(x + 2)^2 + \sqrt{9}$

f) $y = -7 \cdot (x^2 - 6 \cdot x + 9) + 1$

V. Die Scheitelform einer Parabelgleichung – Lehrerblatt

V.1. Die Parameter der Scheitelform erkunden

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/tn2vcbrb

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Mit der Scheitelform einer Parabelgleichung haben sich die Schülerinnen und Schüler erstmals eine systematische Veränderung einer Funktionsgleichung und dessen Auswirkungen auf den zugehörigen Graphen erarbeitet („***Transformationen***" – lateinisch: *transformare* – umwandeln, umformen). Diese Vorgehensweise ist grundlegend und muss nur noch um die Streckung in x-Richtung ergänzt werden. Sie kann von nun an auch bei anderen Funktionstypen angewandt und vertieft werden.

Als Ergänzung und Vertiefung wird durch den forschenden Arbeitsauftrag die Bedeutung der Reihenfolge der Veränderungen untersucht:

Es gilt, z.B. in alphabetischer Reihenfolge: Spiegelung – Streckung – Verschiebung (weitere einfache graphische Beispiele, bei denen Spiegelung, Streckung, Verschiebung in der Reihenfolge vertauscht sind, unterstützen das Verständnis)

Aufgabe:

Es bietet sich als zusätzliche Unterstützung an, die Parabelgleichung an manchen Stellen ausführlich umzuschreiben und mit Farben zu arbeiten. Außerdem können die zu untersuchenden Parabeln mit dem GeoGebra-Applet dargestellt und die Antworten so überprüft werden.

a) $y = (x+5)^2 - 3 = (x-(-5))^2 - 3$
Scheitel $S(-5|-3)$
Keine Spiegelung, keine Streckung, Verschiebung um 5 Einheiten nach links und 3 Einheiten nach unten,

b) $y = 2 \cdot (x-3)^2 + 4$
Scheitel $S(3|4)$, Keine Spiegelung, Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, Verschiebung um 3 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach oben

c) $y = -2 \cdot (x-1)^2 + 0$
Scheitel $S(1|0)$, Spiegelung des Graphen an der x–Achse, Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, Verschiebung um 1 Einheit nach rechts, keine Verschiebung in y-Richtung

d) $y = \frac{1}{5} \cdot x^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \cdot (x-0)^2 - \frac{3}{4}$
Scheitel $S(0|-\frac{3}{4})$, Keine Spiegelung, Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{5}$ in y-Richtung, keine Verschiebung in x-Richtung, Verschiebung um $\frac{3}{4}$ Einheiten nach unten

e) $y = -(x+2)^2 + \sqrt{9} = -(x-(-2))^2 + 3$
Scheitel $S(-2|3)$, Spiegelung des Graphen an der x–Achse, keine Streckung, Verschiebung um 2 Einheiten nach links und 3 Einheiten nach oben

f) $y = -7 \cdot (x^2 - 6 \cdot x + 9) + 1 = -7 \cdot (x-3)^2 + 1$
Scheitel $S(3|1)$, Spiegelung des Graphen an der x–Achse, Streckung mit dem Faktor 7 in y-Richtung, Verschiebung um 3 Einheiten nach rechts und eine Einheit nach oben

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

<u>V.2. Scheitelform und Streckfaktor</u> – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/g4pbbsmj

Die Scheitelform der Parabelgleichung lautet: $y = a \cdot (x-d)^2 + e$

Dabei ist $S\ (\ d\ |\ e\ )$ der Scheitel und a der Streckfaktor der Parabel.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Das Graspable Math-Applet im Arbeitsauftrag lässt dich schrittweise die Berechnung des Streckfaktors nachvollziehen. Die folgende Beispiel-Aufgabe wiederholt und vertieft dieses Wissen.

<u>Beispiel-Aufgabe:</u>
Gesucht ist die Gleichung der Parabel, die den Scheitelpunkt $S\ (\ 1\ |\ 2\ )$ besitzt und auf der der Punkt $P\ (\ 3\ |\ 14\ )$ liegt.

Beschreibe nun in eigenen Worten die Vorgehensweise bei den einzelnen folgenden Rechenschritten:

$y = a \cdot (x-d)^2 + e$

$y = a \cdot (x-1)^2 + 2$

$14 = a \cdot (3-1)^2 + 2$

$a = \frac{12}{4} = 3$

$y = 3 \cdot (x-1)^2 + 2$

Im Kapitel IV. hast du den Streckfaktor auch rechnerisch und graphisch bestimmt – überprüfe nun mithilfe des GeoGebra-Applets, ob deine graphische Vorgehensweise immer noch funktioniert. Verändere dazu die Werte der Parameter a, d und e im Applet.

<u>Für Formel-Liebhaber:</u>
Für eine in y-Richtung gestreckte und in x- bzw. y-Richtung verschobene Parabel mit Scheitel $S\ (\ x_S\ |\ y_S\ )$ kann der Wert des Streckfaktors a in der Parabelgleichung auch mit Hilfe der folgenden Formel berechnet werden: $a = \frac{y_P - y_S}{(x_P - x_S)^2}$ (vereinfacht mit $S(0|0)$: $a = \frac{y_P}{{x_P}^2}$). Dabei ist $P(x_P|y_P)$ ein Punkt auf dieser Parabel.

<u>Auftrag:</u>
Markiere in der ausführlichen Lösung der Beispiel-Aufgabe oben den Teil, an der man diese Formel bereits erahnen kann, und berechne mit der ausführlichen und der vereinfachten Formel jeweils erneut den Streckfaktor aus obiger Beispielaufgabe.

V.2. Scheitelform und Streckfaktor – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/g4pbbsmj

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Dieses Arbeitsblatt deckt sich inhaltlich und strukturell mit dem Arbeitsblatt IV.2. Die Erkenntnisse sollen an dieser Stelle wiederholt und auf die veränderte Parabelgleichung angepasst werden.

Die Schülerinnen und Schüler sollen nachvollziehen, dass eine Verschiebung keine Auswirkungen auf den Streckfaktor hat und dass damit alle bisher erlernten Überlegungen dieselben sind.

Sehr hilfreich für das Verständnis sind die einzelnen „greifbaren" Schritte im Graspable Math-Applet.

Durch einen expliziten Hinweis auf den „TIPP" können Schülerinnen und Schüler genau diese Beispielaufgabe im Graspable Math-Applet einstellen und die Rechenschritte bildhaft nachvollziehen.

Beispiel-Aufgabe:

$y = a \cdot (x-d)^2 + e$	allgemeine Scheitelform der Parabelgleichung
$y = a \cdot (x-1)^2 + 2$	Setze die Koordinaten des Scheitelpunktes ein, also $d = 1$ und $e = 2$.
$14 = a \cdot (3-1)^2 + 2$	Setze die Koordinaten des Punktes P ein, also $x_P = 3$ und $y_P = 14$.
$\boxed{a = \frac{12}{4} = 3}$	ausführlich: $\boxed{a = \frac{14-2}{(3-1)^2} = \frac{12}{4} = 3}$ nach a auflösen
$y = 3 \cdot (x-1)^2 + 2$	Setze den Wert von a und die Koordinaten des Scheitelpunktes in die allgemeine Gleichung ein.

Graphische Bestimmung des Streckfaktors:

Da eine Verschiebung in x- oder y-Richtung keine Auswirkungen auf den Streckfaktor hat, gilt die Vorgehensweise weiterhin!

Für Formel-Liebhaber:

Die Formel ist bereits in der Beispielrechnung erkennbar (→ roter Kasten). Ersetzt man oben in der Beispielaufgabe die entsprechenden Zahlen durch x_P bzw. y_P und führt die Rechenschritte gemäß der Vorgehensweise oben durch, erhält man die Formel. Auf diese Weise kann man (unterstützt von Farben) die Formel plausibel machen. Hilfreich ist hierbei die oben aufgeführte ausführliche Schreibweise der Rechnung ohne Vereinfachung.

Ziel soll allerdings nicht die Herleitung sondern die Benutzung der Formel sein. Eingesetzt ergibt sich: $a = \frac{14-2}{(3-1)^2} = 3$

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

VI. Weitere Darstellungsformen der Parabelgleichung – Entdeckerblatt

VI.1. Binomische Formeln und die Scheitelform der Parabelgleichung

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/ycha6gmg

Bearbeite die Wiederholungsaufgaben zu den binomischen Formeln im GeoGebra-Buch. Erstelle jeweils eine Übungsaufgabe zur binomischen Formel – orientiere dich dabei an den bearbeiteten Aufgaben. Stelle die Aufgabe deiner Nachbarin oder deinem Nachbarn und bearbeite selbst ihre bzw. seine Aufgabe. (Ihr könnt eure Aufgabe testen, wenn ihr im Applet für d einen Wert eingebt und das Applet bis zum grauen Kasten durchklickt.)

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Überleitung: Gegeben ist eine Parabelgleichung in Scheitelform $y = 3 \cdot (x-2)^2 + 1$

Forme die Parabelgleichung in die allgemeine Form um. Du kannst gerne das GeoGebra-Applet aus VI.1. oder auch das Graspable Math-Applet aus VI.2. als Hilfe verwenden.

VI.2. Die allgemeine Form der Parabelgleichung

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/eu8ggftc

Untersuche den Einfluss der Parameter a und c in der allgemeinen Form der Parabelgleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ auf die zugehörige Parabel.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Auch der Parameter b hat einen besonderen Einfluss auf die zugehörige Parabel. Schalte im GeoGebra-Applet als Hilfe die ▶ Spur an und beschreibe die Auswirkungen des Parameters b.

Entdecken. Erforschen. Erkennen.

VI.3. Besonderheiten der Parabelgleichung in allgemeiner Form – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/yykkteyb

Setze im GeoGebra-Applet den Wert der Parameter a, b und c in der allgemeinen Form der Parabelgleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ nacheinander 0.

Untersuche die Auswirkungen auf den Graphen – notiere deine Erkenntnisse hier.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

VI.4. Sonderfall der allg. Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x$

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/u7yzdcag

Bearbeite die Einstiegsaufgabe zur Flugkurve des Fußballs im GeoGebra-Buch (zunächst OHNE ☐ Achsen anzeigen zu lassen) und notiere deine Rechenschritte und Ergebnisse hier – das GeoGebra-Applet auf der Seite hilft dir dabei.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Betrachte abschließend deine Rechenschritte in der Fußball-Aufgabe und beschreibe dann den Vorteil, den eine Parabelgleichung in Form eines Produktes gegenüber der allgemeinen Form hat.

VI.5. Die Produktform der Parabelgleichung

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/es4wv4dh

Bearbeite die Seite im GeoGebra-Buch.

Mithilfe der ***Übungsaufgabe*** kannst du dein Wissen zum gesamten Kapitel VI. überprüfen:

Gegeben ist die Parabelgleichung in der Produktform $y = -0{,}5 \cdot x \cdot (x - 4)$.
Lies die Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse ab. Kannst du auch den x-Wert des Scheitels vorhersagen? Überprüfe deine Ergebnisse mithilfe des GeoGebra-Applets.

ZUSATZ: Wandle die Parabelgleichung in die allgemeine Form um – du brauchst Hilfe? Scrolle auf der Seite im GeoGebra-Buch ganz nach unten.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

VI. Weitere Darstellungsformen der Parabelgleichung – Lehrerblatt

VI.1. Binomische Formeln und die Scheitelform der Parabelgleichung

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/ycha6gmg

Die binomischen Formeln bilden eines der grundlegenden Werkzeuge in der Mathematik. Auch im Zusammenhang der Umformung von Scheitelform (Binom) zu allgemeiner Form können sie sich als durchaus hilfreich und zeitsparend erweisen.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Die Übungsaufgabe soll nicht nur auf das sture Umformen, sondern auf das „kreative" Erstellen von Aufgaben abzielen – als Ersteller einer Aufgabe muss man als Experte auch die Lösung parat haben, was eine weitere Herausforderung mit sich bringt. Individuelle Lösungen, wie z.B. $(x-4)^2 = x^2 - 8 \cdot x + 16$

Die Überleitung verknüpft die binomischen Formeln mit der Anwendung in der Umformung der einzelnen Formen der Parabelgleichung. Sowohl das GeoGebra-Applet aus VI.1. (jeder einzelne Rechenschritt wird ausgegeben) als auch das Graspable Math-Applet aus VI.2. (man kann die Termumformungen „händisch" durchführen) helfen dabei.

$y = 3 \cdot (x-2)^2 + 1 = 3 \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 4) + 1 = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 12 + 1 = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 13$

VI.2. Die allgemeine Form der Parabelgleichung

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/eu8ggftc

a: Streckfaktor (analog zur Scheitelform)

c: Verschiebung des Graphen in y-Richtung nach oben / unten

Der Wert des **y-Achsenabschnitts** c ist unmittelbar an der y-Achse ablesbar.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Die Auswirkungen des Parameters b sind nicht so offensichtlich „ablesbar". Die Spur des Scheitelpunktes soll helfen, die Veränderung des Graphen deutlich zu machen.

b: gleichzeitige Verschiebung der Parabel in x- und in y-Richtung

Ein mögliches Thema kann die parabelförmige Ortskurve, die die Lage des Scheitelpunktes in Abhängigkeit von b beschreibt, sein – auf diese Besonderheit kann als Vertiefung mit sehr hohem Anforderungsniveau nochmals eingegangen werden, wenn die allgemeinen Koordinaten des Scheitelpunktes hergeleitet sind. Am allgemeinen y-Wert des Scheitelpunktes erkennt man den quadratischen Einfluss von b.

VI.3. Besonderheiten der Parabelgleichung in allgemeiner Form

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/yykkteyb

Durch das GeoGebra-Applet soll den Schülerinnen und Schülern bewusst werden, dass manche Werte der Parameter eine Parabel besonders machen.

$a = 0$: $y = b \cdot x + c$ → Der Graph ist eine Gerade. Deshalb gilt für Parabeln $a \neq 0$.

$b = 0$: $y = a \cdot x^2 + c$ → Der Scheitel liegt stets auf der y–Achse: $S\,(\,0\,|\,c\,)$

Sonderfall der Scheitelform: $y = a \cdot (x-0)^2 + c$

$c = 0$: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x$ → Die Parabel enthält stets den Ursprung.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

VI.4. Sonderfall der allg. Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x$ – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/u7yzdcag

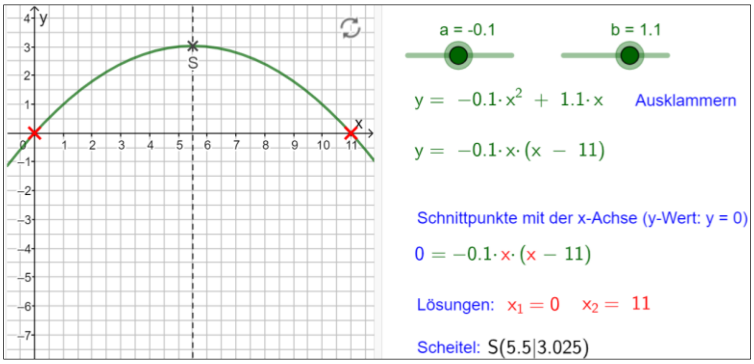
QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Wie bei allen Aufgaben zu Flugkurven von Bällen in diesem Buch liegt der erste Schwerpunkt wieder darauf, die sinnvolle Platzierung des Koordinatenursprungs zu erkennen.

a) Da die x-Achse den ebenen Boden des Spielfelds beschreibt und die Parabel auf jeden Fall ($c = 0$) den Ursprung enthält, sollte die y-Achse „durch" den Schützen verlaufen, wobei der Ursprung in dessen Fuß (Beginn der Flugkurve) gelegt wird.

b) Die Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse legen die Entfernung zwischen Schützen und Tor fest.

c) Die maximale Flughöhe wird durch den y-Wert des Scheitelpunkts der Parabel beschrieben. Diese kann man, z.B. über die Symmetrieeigenschaften der Schnittstellen bestimmen.



Die Produktform hat den großen Vorteil gegenüber das allgemeinen Form, dass man die Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse direkt ablesen kann. Auch der x-Wert des Scheitelpunktes ist (aus Symmetriegründen) anhand der Schnittstellen sofort bestimmbar.

VI.5. Die Produktform der Parabelgleichung

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/es4wv4dh

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

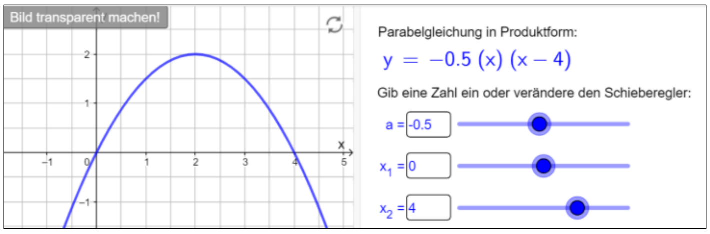
$y = -0{,}5 \cdot x \cdot (x - 4)$:

Schnittstellen mit der x-Achse:

$x_1 = 0$ oder $x_2 = 4$

x-Wert des Scheitelpunktes:

$x_S = 2$



Umformen in die allgemeine Form durch Ausmultiplizieren (Der Link *https://graspablemath.com/canvas/?load=_0343294010fef530* am Ende der Seite zu Graspable Math kann sehr hilfreich für das Verständnis sein):

$y = \mathbf{-0,5 \cdot x} \cdot (x - 4)$ *Ausmultiplizieren*

$y = \mathbf{-0,5 \cdot x} \cdot x - \mathbf{0,5 \cdot x} \cdot (-4)$ *Zusammenfassen*

$y = -0{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

VII. Von der allg. Form zur Scheitelform der Parabelgleichung – Entdeckerblatt

VII.1. Graphisch-rechnerisches Vorgehen

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/fpuvggtd

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Gegeben ist die Parabelgleichung in allgemeiner Form $y = 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 7$.

Beschreibe schrittweise das in den GeoGebra-Applets dargestellte Verfahren zur Berechnung der Koordinaten des Scheitelpunktes aus der Parabelgleichung in allgemeiner Form. Wende dabei jeden beschriebenen Schritt auf die Gleichung oben an.

Aufgabe:

Führe die oben beschriebenen Schritte mit der allgemeinen Parabelgleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ durch. Gerne kannst du diese Schritte direkt oben in deinem Aufschrieb jeweils an der zugehörigen Stelle farbig ergänzen.

Für die Parabel in allgemeiner Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ lauten die Koordinaten des Scheitelpunktes:

S (|)

Findest du mit diesem allgemeinen Scheitelpunkt auch den höchsten Punkt der Basketball-Kurve in der Einstiegsaufgabe? Mit den Codes aus den Applets kannst du dein Ergebnis überprüfen!

VII. Von der allg. Form zur Scheitelform der Parabelgleichung – Lehrerblatt

VII.1. Graphisch-rechnerisches Vorgehen

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/fpuvggtd

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

In beiden oberen GeoGebra-Applets wird das Vorgehen schrittweise beschrieben – das Prinzip ist stets dasselbe:

Parabelgleichung in allgemeiner Form:

$y = 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 7$ $\qquad$ $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \;\; (a \neq 0)$

1. Verschiebe die Parabel entlang der y-Achse, so dass der y-Achsenabschnitt auf den Ursprung liegt ($\rightarrow c = 0$). Die verschobene Parabel besitzt nun die Gleichung:

   $y = 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x$ $\qquad$ $y = a \cdot x^2 + b \cdot x$

2. Finde die Schnittstellen mit der x-Achse – setze dazu $y = 0$:

   $0 = 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x$ $\qquad$ $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x$

3. Klammere x aus:

   $0 = x \cdot (4 \cdot x - 8)$ $\qquad$ $0 = x \cdot (a \cdot x + b)$

4. Wende den Satz vom Nullprodukt an:

   $x_1 = 0$ oder $4 \cdot x_2 - 8 = 0 \;\rightarrow\; x_2 = 2$ $\qquad$ $x_1 = 0$ oder $x_2 = -\frac{b}{a}$

5. Der x-Wert des Scheitels liegt in der Mitte der beiden Schnittstellen:

   $x_S = 1$ $\qquad$ $x_S = -\frac{b}{2 \cdot a}$

6. Bestimme y–Wert des Scheitelpunktes durch Einsetzen des x_S-Werts in die ursprüngliche Parabelgleichung:

   $y_S = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 7 = 3$ $\qquad$ $y_S = a \cdot \left(-\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2 \cdot a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{2^2 \cdot a^2} - \frac{b^2}{2 \cdot a} + c = \frac{b^2}{4 \cdot a} - \frac{2 \cdot b^2}{4 \cdot a} + c = -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$

7. Die Koordinaten des Scheitelpunktes lauten:

   $S(1|3)$ $\qquad$ $S\left(-\frac{b}{2 \cdot a} \middle| -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c\right)$

   möglicher ZUSATZ: Parabelgleichung in Scheitelform: $y = 4 \cdot (x - 1)^2 + 3$

Aufgabe:

Basketball-Kurve $\qquad$ $y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2$

Werte der Parameter: $\qquad$ $a = -\frac{1}{2}\,; b = 2\,; c = 2$

Formel für den x-Wert des Scheitels: $\qquad$ $x_S = -\frac{b}{2 \cdot a} \rightarrow x_S = -\frac{2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$

y-Wert durch Einsetzen in die Parabelgleichung: $y_S = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{2}^2 + 2 \cdot \mathbf{2} + 2 = 4$ $\qquad \rightarrow S(2|4)$

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

VII.2. Binomische Formeln rückwärts – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/gwwgeswc

Im GeoGebra-Buch wurde dir gezeigt, wie du mit Hilfe der so genannten ***quadratischen Ergänzung*** auf direktem, rechnerischem Weg durch Umformen die Scheitelform der Parabelgleichung bestimmen kannst. Teste dich nun selbst, indem du die folgenden vier Parabelgleichungen in allgemeiner Form auf diese Weise in die Scheitelform umrechnest.

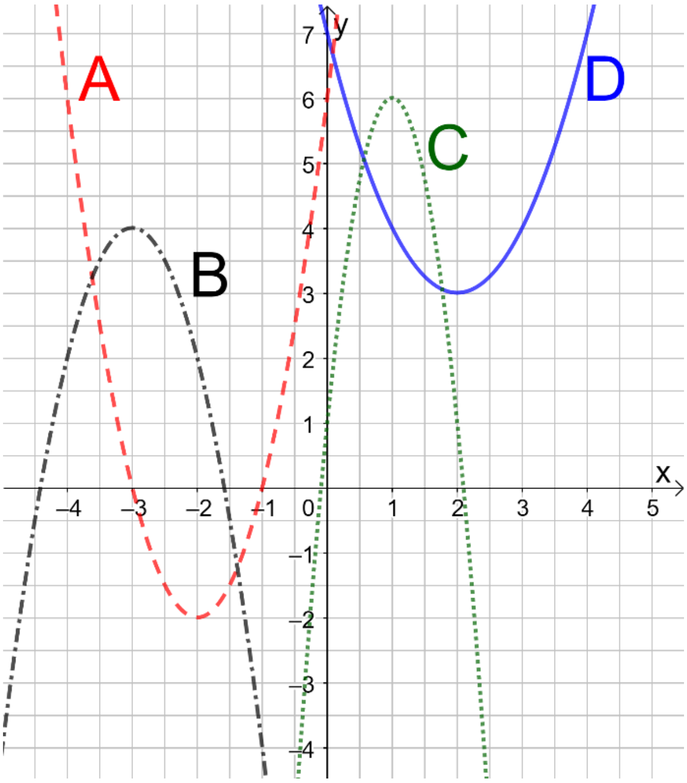
QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

a) $y = x^2 - 4 \cdot x + 7$

b) $y = 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 6$

c) $y = -5 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 1$

d) $y = -2 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 14$



Ordne die entsprechenden Parabelgleichungen jeweils einem der Graphen A bis D zu.

a) $y = x^2 - 4 \cdot x + 7$ Graph: ____

b) $y = 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 6$ Graph: ____

c) $y = -5 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 1$ Graph: ____

d) $y = -2 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 14$ Graph: ____

Die abgebildeten Parabeln lassen sich zudem über den Scheitelpunkt / die Parabelgleichung in Scheitelform eindeutig zuordnen. Eine eindeutige Zuordnung ist aber auch direkt über die gegebenen Parabelgleichungen in allgemeiner Form möglich. Schau dir die Gleichungen und die Parabeln mal genauer an – erkennst du ein solches eindeutiges Zuordnungskriterium?

VII.2. Binomische Formeln rückwärts – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/gwwgeswc

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Eine weitere Möglichkeit, eine Parabelgleichung von der allgemeinen Form in die Scheitelform umzuwandeln, führt über die ***quadratische Ergänzung***.

Die binomische Formel wird an dieser Stelle „*rückwärts*“ betrachtet – das Binom ist gesucht.

a) $y = x^2 - 4 \cdot x + 7 = x^2 - 2 \cdot \mathbf{2} \cdot x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2 + 7 = (x - \mathbf{2})^2 + 3$

$S(2|3)$ Graph: D

b) $y = 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 6 = 2 \cdot (x^2 + 4 \cdot x) + 6 = 2 \cdot (x^2 + 2 \cdot \mathbf{2} \cdot x + \mathbf{2}^2 - \mathbf{2}^2) + 6$

$= 2 \cdot ((x + \mathbf{2})^2 - \mathbf{2}^2) + 6 = 2 \cdot (x + \mathbf{2})^2 - 2$

$S(-2|-2)$ Graph: A

c) $y = -5 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 1 = -5 \cdot (x^2 - 2 \cdot x) + 1 = -5 \cdot (x^2 - 2 \cdot \mathbf{1} \cdot x + \mathbf{1}^2 - \mathbf{1}^2) + 1$

$= -5 \cdot ((x - \mathbf{1})^2 - \mathbf{1}^2) + 1 = -5 \cdot (x - \mathbf{1})^2 + 6$

$S(1|6)$ Graph: C

d) $y = -2 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 14 = -2 \cdot (x^2 + 6 \cdot x) - 14 = -2 \cdot (x^2 + 2 \cdot \mathbf{3} \cdot x + \mathbf{3}^2 - \mathbf{3}^2) - 14$

$= -2 \cdot ((x + \mathbf{3})^2 - \mathbf{3}^2) - 14 = -2 \cdot (x + \mathbf{3})^2 + 4$

$S(-3|4)$ Graph: B

Eine eindeutige Zuordnung ist in diesen Beispielen auch direkt über den entsprechenden Streckfaktor möglich – an dieser Stelle bietet sich die Möglichkeit, die graphische Bestimmung und die Bedeutung des Streckfaktors zu wiederholen:

Zwei Parabeln sind nach oben geöffnet ($a > 0$), zwei Parabeln sind nach unten geöffnet ($a < 0$).

Grundprinzip: Gehe vom Scheitelpunkt aus eine Einheit in x-Richtung nach rechts und anschließend in y-Richtung, bis du wieder den Graphen erreicht. Die y-Richtung bestimmt das Vorzeichen und der Betrag der zurückgelegten Strecke den Wert des Streckfaktors.

Diese Vertiefung der Erkenntnisse zum Streckfaktor wird auf der letzten Seite nochmals aufgegriffen.

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

<u>VII.3. Umwandlung zusammengefasst</u> – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/bqzru2yv

Bearbeite die Einstiegsaufgabe zur Flugkurve des Volleyballs im GeoGebra-Buch (zunächst OHNE ▢ Achsen anzeigen).

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Notiere deine Rechenschritte und Ergebnisse hier – das GeoGebra-Applet auf der Seite hilft dir dabei.

VII.3. Umwandlung zusammengefasst – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/bqzru2yv

Die Flugkurve des Volleyballs ist eine weitere motivierende und anschauliche Anwendungsaufgabe zur Vertiefung des bisher Gelernten und zum Erarbeiten von neuen Inhalten.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Die Flugkurve ist gegeben durch die Parabel mit der Gleichung $y = -0{,}04 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 2$

a) Die x-Achse beschreibt den ebenen Boden – deswegen wird die y-Achse so gelegt, dass der Ball auf der y-Achse von der Spielerin getroffen wird.

b) Aus a) folgt: $x = 0$. Daher beträgt die Anfangsschlaghöhe $y = -0{,}04 \cdot 0^2 + 0{,}4 \cdot 0 + 2 = 2$ [m]. Auch eine Argumentation über den y-Achsenabschnitt $c = 2$ ist denkbar.

c) Die Vorgehensweise ist nicht festgelegt – eine Möglichkeit ist die Verwendung der Formel:

Formel für den x-Wert des Scheitels: $x_S = -\frac{b}{2 \cdot a} \rightarrow x_S = -\frac{0{,}4}{2 \cdot (-0{,}04)} = 5$

y-Wert durch Einsetzen in die Parabelgleichung: $y_S = -0{,}04 \cdot 5^2 + 0{,}4 \cdot 5 + 2 = 3 \quad \rightarrow S(5|3)$

Die y-Koordinate des Scheitels legt die gesuchte maximale Höhe 3 m fest.

d) Das Netz ist 6 m vom Schläger entfernt: $x = 6$ eingesetzt $y = -0{,}04 \cdot 6^2 + 0{,}4 \cdot 6 + 2 = 2{,}96$ [m] Passierhöhe

In diesem Zusammenhang ist es durchaus als Vertiefung denkbar, über den Definitionsbereich (also die sinnvollen Werte für x) zu diskutieren. Die Frage nach der horizontalen Entfernung der Auftrittsstelle des Balles zum Spieler oder gar zum Netz ist sicher sinnvoll, wenn es darum geht, ob der Ball innerhalb oder außerhalb des Feldes aufkommt.

Diese aufgrund der Aufgabenstellung sinnvolle und berechtigte Frage kann den Blick der Schülerinnen und Schüler auf das nachfolgende Thema lenken – es fehlt bisher das Werkzeug, diese Stellen nicht nur graphisch, sondern sogar rechnerisch zu ermitteln. Diese Lücke schließt dann das sich anschließende Thema der quadratischen Gleichungen mit DER Formel der Mittelstufe – der Lösungsformel / abc-Formel / Mitternachtsformel / pq-Formel.

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

VIII. Zusammenfassung des Buches – Entdeckerblatt

VIII.1. Die Darstellungsformen der Parabelgleichung im Überblick

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/uexg6x3q

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Es gibt drei Grundformen der Parabelgleichung ($a \neq 0$):

a) **Die Scheitelform** $y = a \cdot (x - d)^2 + e$

Hierbei ist a der Steckfaktor und die Koordinaten des Scheitels lauten $S\ (\ d \mid e\ )$.

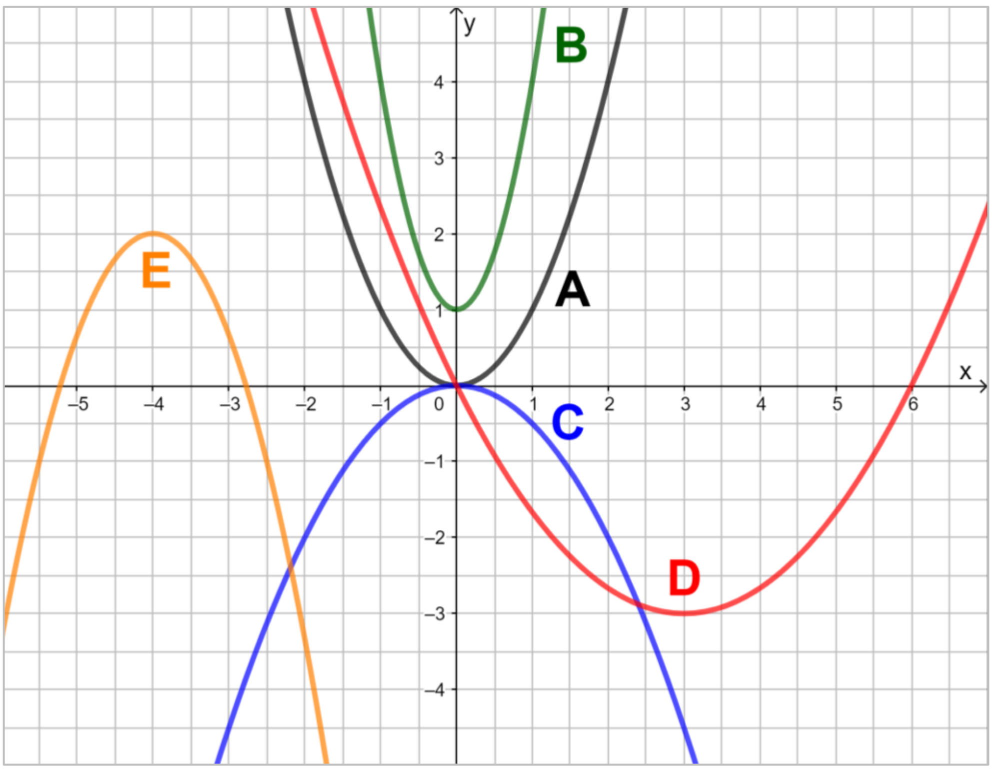
b) **Die allgemeine Form** $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Hierbei ist a der Steckfaktor und c der y-Achsenabschnitt der Parabel.

c) **Die Produktform** $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Hierbei ist a der Steckfaktor und x_1 beziehungsweise x_2 sind die Schnittstellen mit der x-Achse. Die Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ nennt man ***Linearfaktoren***.

Der Streckfaktor a ist in allen drei Darstellungsweisen direkt ablesbar. Er ist verantwortlich für die Öffnungsrichtung und Öffnungsweite der Parabel. Ordne die Graphen entsprechend zu.



Öffnungsrichtung:

$\boldsymbol{a > 0}$: Die Parabel ist nach oben geöffnet. ***Graph:***

$\boldsymbol{a < 0}$: Die Parabel ist nach unten geöffnet. ***Graph:***

Öffnungsweite:

$\boldsymbol{a = 1}$ *oder* $\boldsymbol{a = -1}$: Die Öffnungsweite der Parabel entspricht der Normalparabel. ***Graph:***

$\boldsymbol{0 < a < 1}$ *oder* $\boldsymbol{-1 < a < 0}$: Die Parabel ist breiter/weiter als die Normalparabel. ***Graph:***

$\boldsymbol{a > 1}$ *oder* $\boldsymbol{a > -1}$: Die Parabel ist schmaler/enger als die Normalparabel. ***Graph:***

VIII.1. Die Darstellungsformen der Parabelgleichung im Überblick – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/uexg6x3q

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Die letzten beiden Seiten des GeoGebra-Buches fassen die Erkenntnisse der gesamten Einheit nochmals zusammen und heben die Vorteile der einzelnen Darstellungsformen heraus. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass ein Umwandeln in eine andere Darstellungsform durchaus Rechen-/Verständnisvorteile bringen kann.

Der Streckfaktor wurde in den Kapiteln davor bereits mehrmals bewusst wieder aufgegriffen, denn er verbindet alle drei gewählten Darstellungsformen. Er ist verantwortlich für die Öffnungsrichtung und Öffnungsweite der Parabel.

So gilt für die abgebildeten Parabeln:

Öffnungsrichtung:

$\boldsymbol{a > 0}$: Die Parabel ist nach oben geöffnet. ***Graph:*** **A , B , D**

$\boldsymbol{a < 0}$: Die Parabel ist nach unten geöffnet. ***Graph:*** **E , C**

Öffnungsweite:

$\boldsymbol{a = 1}$ *oder* $\boldsymbol{a = -1}$: Die Öffnungsweite der Parabel entspricht der Normalparabel. ***Graph:*** **A**

$\boldsymbol{0 < a < 1}$ *oder* $\boldsymbol{-1 < a < 0}$: Die Parabel ist breiter/weiter als die Normalparabel. ***Graph:*** **C , D , E**

$\boldsymbol{a > 1}$ *oder* $\boldsymbol{a > -1}$: Die Parabel ist schmaler/enger als die Normalparabel. ***Graph:*** **B**

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten

VIII.2. Die Umwandlung der Darstellungsformen im Überblick – Entdeckerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/zyw2w4q3

Im Laufe der Einheit hast du drei unterschiedliche Darstellungsformen von Gleichungen für ein und dieselbe Parabel kennengelernt und auch schon teilweise erfahren, wie man diese Darstellungen ineinander umwandelt.

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Aufgabe:

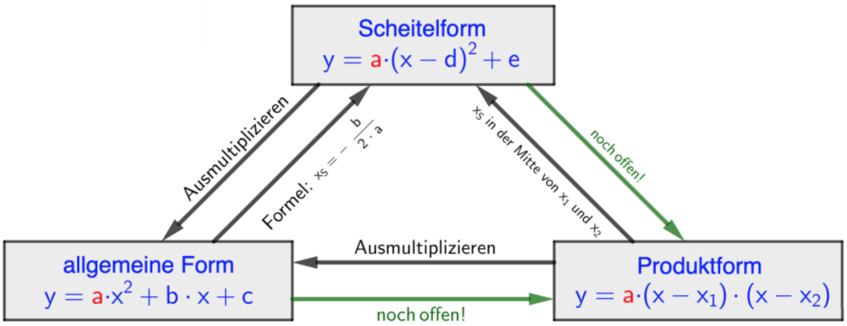
Gib für die fünf dargestellten Parabeln auf der vorangegangenen Seite jeweils die Parabelgleichung in Scheitelform und in allgemeiner Form an.

Du kannst auch gerne das GeoGebra-Applet bzw. die Übersicht auf der Seite zur Hilfe nehmen.

	Scheitelform	allgemeine Form
Parabel A		
Parabel B		
Parabel C		
Parabel D		
Parabel E		

Quintessenz:

Die Grafik gibt abschließend einen Überblick über die Themen, die in den einzelnen Kapiteln zur Unterrichtseinheit „Parabeln“ behandelt wurden.



Lediglich die grünen Pfeile sind noch offen. Kannst du diese Lücken füllen und herausfinden, wie man die Scheitelform bzw. die allgemeine Form der Parabelgleichung in die Produktdarstellung umformen kann? Beschreibe deine Idee zunächst in Worten. Solltest du die Vorgehensweise bereits rechnerisch umsetzen können, so kannst du dies auch gerne im Folgenden darstellen.

VIII.2. Die Umwandlung der Darstellungsformen im Überblick – Lehrerblatt

https://www.geogebra.org/m/hzcmzzt7#material/zyw2w4q3

QR-Code – GeoGebra Buch-Seite

Die Schülerinnen und Schüler kennen nun die verschiedenen Darstellungsformen einer Parabelgleichung und haben eine Idee davon bekommen, wann man welche Form am geschicktesten einsetzt.

Aus diesem Grund ist eine Umwandlung einer Darstellungsform einer Parabelgleichung in eine andere durchaus wichtig (aber nicht immer zwingend notwendig) für eine Aufgabenstellung.

Die beiden zentralen Darstellungsformen sind die Scheitelform und die allgemeine Form einer Parabelgleichung, die nun direkt anhand von Graphen abgelesen und bei Bedarf auch ineinander umgewandelt werden können:

	Scheitelform	**allgemeine Form**
Parabel A	$y = x^2$	$y = x^2$
Parabel B	$y = 3 \cdot x^2 + 1$	$y = 3 \cdot x^2 + 1$
Parabel C	$y = -0{,}5 \cdot x^2$	$y = -0{,}5 \cdot x^2$
Parabel D	$y = \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 - 3$	$y = \frac{1}{3} \cdot x^2 - 2 \cdot x$
Parabel E	$y = -\frac{4}{3} \cdot (x+4)^2 + 2$	$y = -\frac{4}{3} \cdot x^2 - 6 \cdot x - 10$

Quintessenz:

Individuelle Lösung, z.B. Schnittstellen der Parabel (in Scheitelform) bestimmen, indem man y null setzt und versucht, die Gleichung nach x aufzulösen. Man erhält eine neue Form einer Gleichung – eine „quadratische Gleichung“. Hat man die Lösungen x_1 bzw. x_2 dieser Gleichung bestimmt, kann man diese in die Produktform einsetzen (wenn die Darstellung in dieser Form überhaupt möglich ist! Parabeln ohne Schnittpunkte mit der x-Achse können im Reellen nicht in der Produktform dargestellt werden).

Mathematik weiterdenken	Lernprozesse individualisieren	Mit Forscherfragen arbeiten	Mathematik sichtbar machen	Leistungen beurteilen
Unterricht inhaltlich öffnen	SchülerInnen aktive Rolle ermöglichen	Fragenstellen üben	Mathematik suchen und finden	individuelle Lernziele zulassen
außerschulische Lernort aufsuchen (einbeziehen)	Strukturelle und Inhaltliche Impulse setzen	vielfältige Herangehensweisen ermöglichen	Fachsprache anwenden	Kriterien erarbeiten und anwenden
mit anderen Fächern zusammenarbeiten	konstruktiv mit Ideen der SchülerInnen umgehen	an die Lebenswelt der SchülerInnen anknüpfen	Mathematische Erkenntnisse dokumentieren	SchülerInnen zur Selbstreflexion anleiten