

Bepaalde integraal

www.karelappeltans.be

February 11, 2025

1 Inleiding

"Oppervlakte" berekenen tussen de grafiek van een functie en een gedeelte van de x-as.

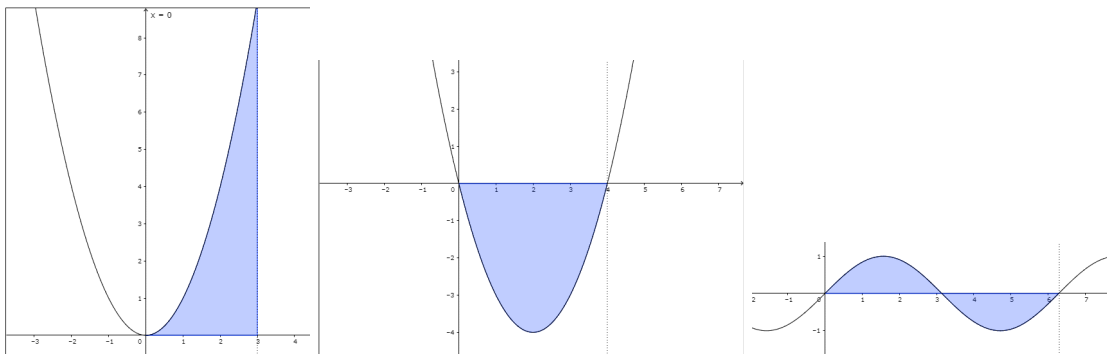


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/CwjpD27v>

2 Bepaalde integraal als Riemansom

2.1 Riemansom

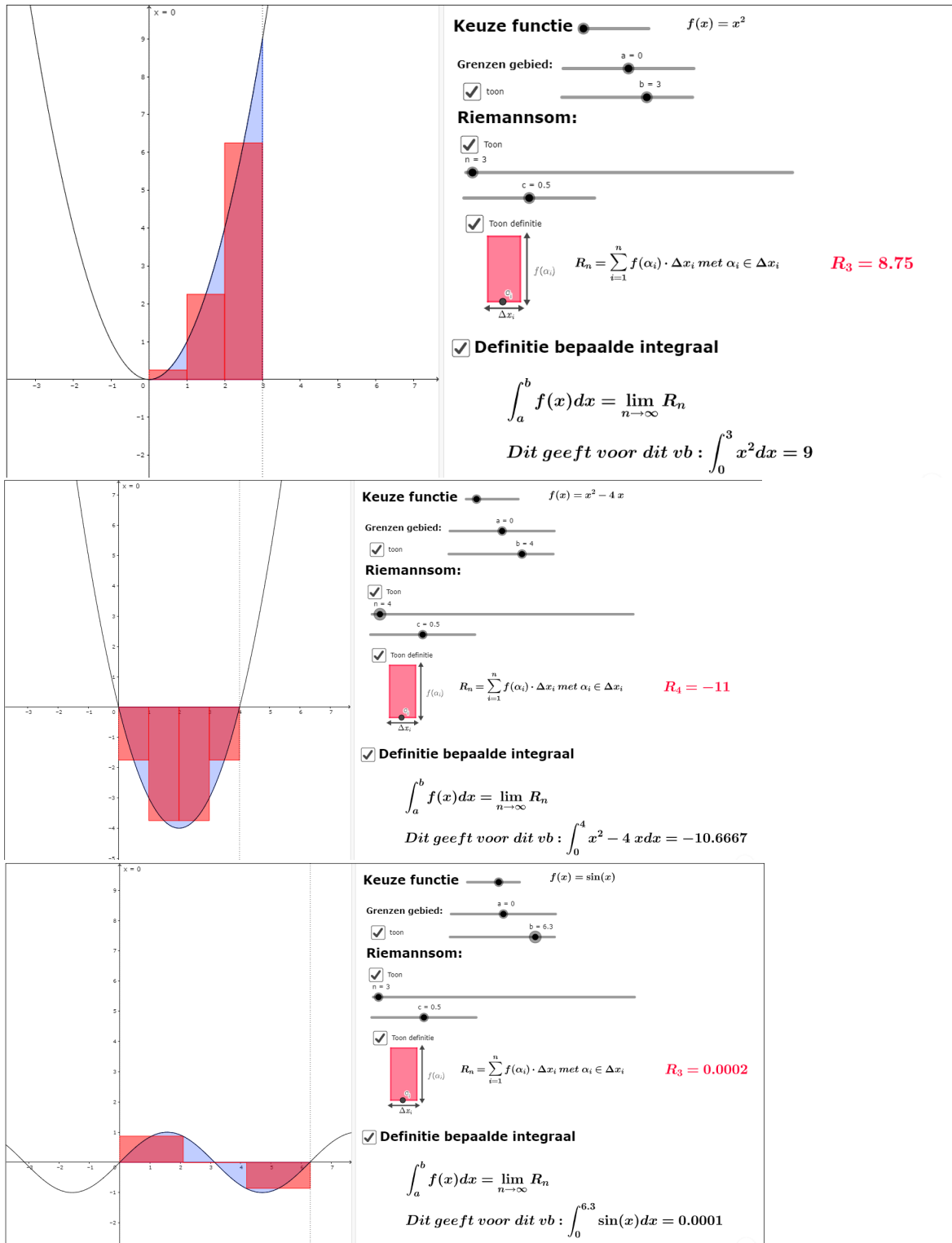


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/Cwjpd27v>

2.2 Onder- en bovensommen

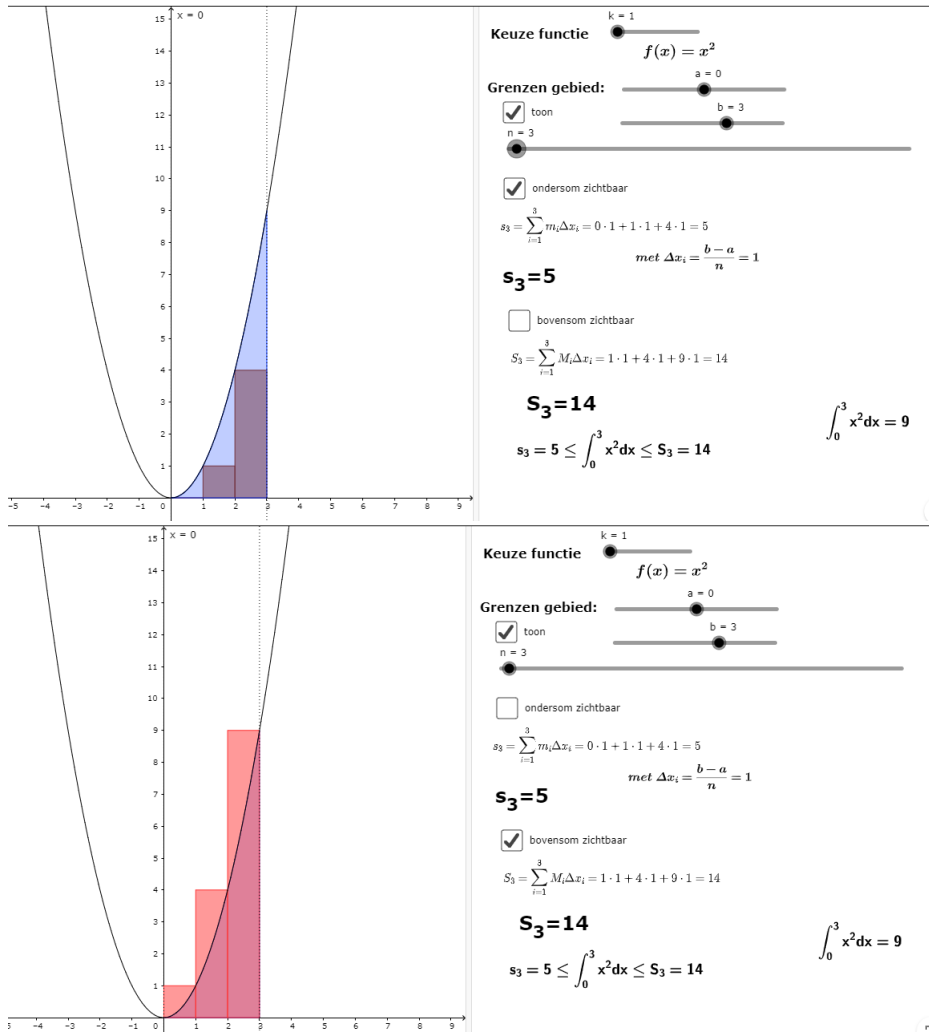


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/Cwjpd27v>

2.3 Trapeziumregel

In plaats van rechthoeken, kan men ook met trapezijs werken:

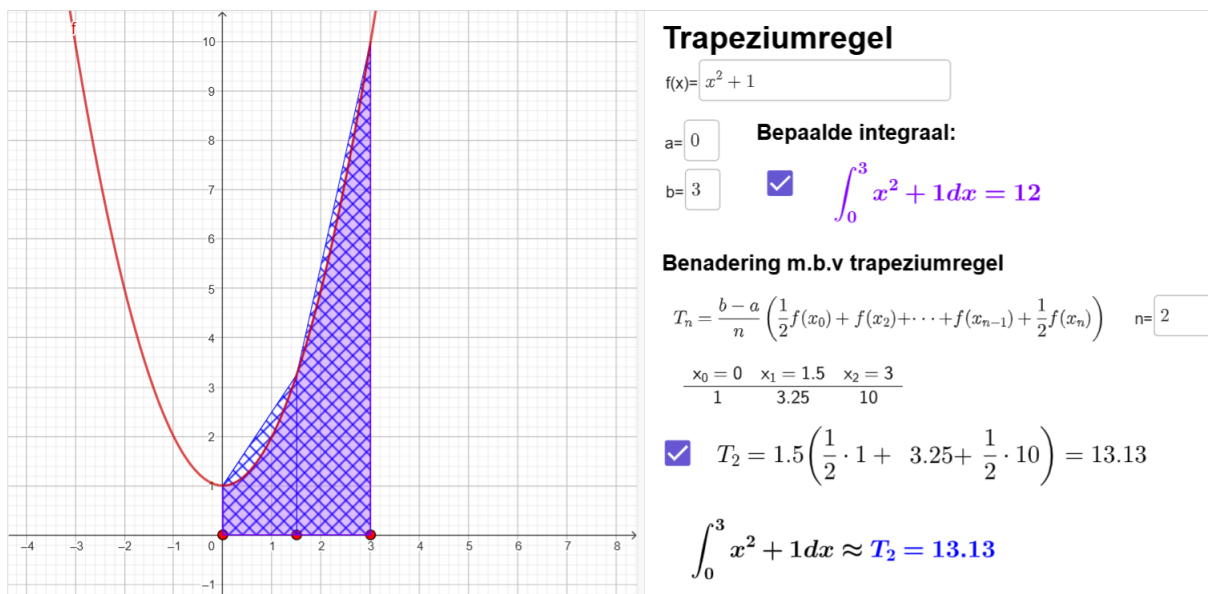


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/j2uhfvzh>

3 Bepaalde integraal als som van georiënteerde oppervlakte

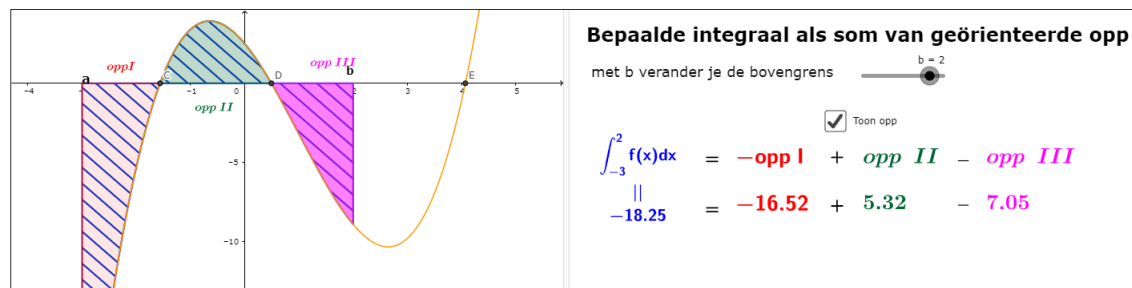


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/Cwjpd27v>

4 Rekenregel

Rekenregel

Een bepaalde integraal berekenen met onder- en/of bovensommen is niet erg praktisch. Volgende rekenregel geldt echter

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{met } DF = f$$

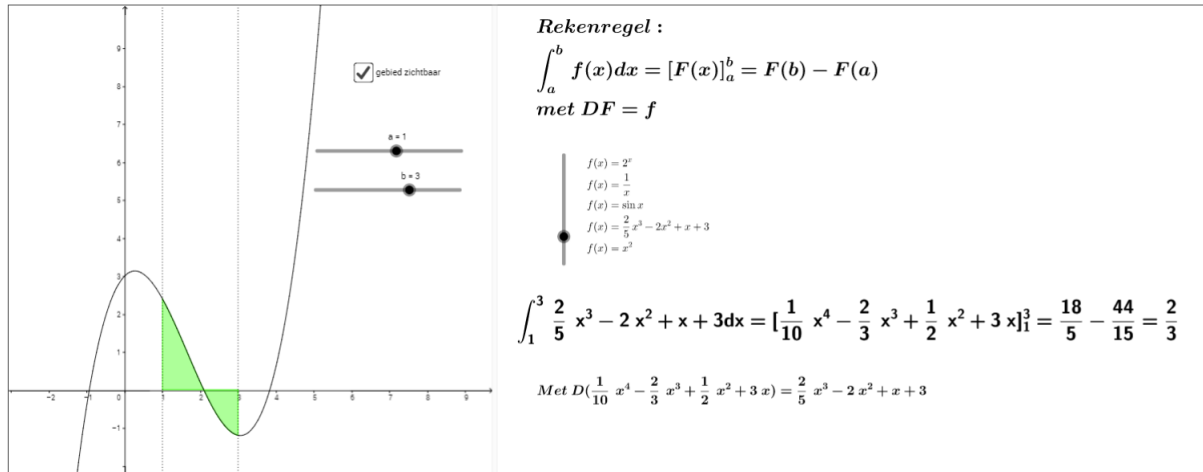


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/k3jNteMx>

5 Bewijs rekenregel

5.1 Integraalfunctie

5.1.1 Begripsvorming

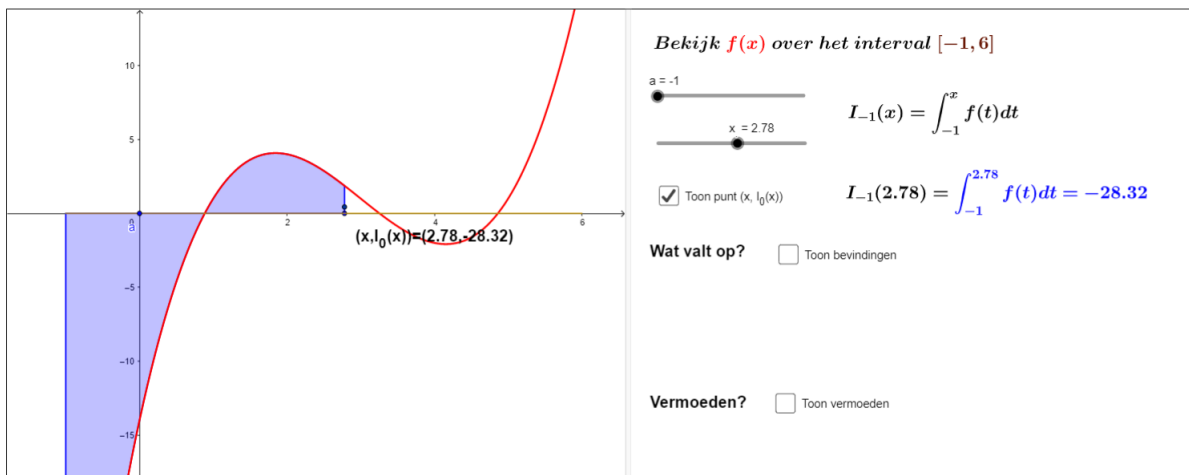


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/QzHejD4G>

5.1.2 Hoofdstelling van de integraalrekening

Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een reële continue functie op het interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dan is voor alle $x_0 \in [a, b]$ de functie

$$I_{x_0} = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

afleidbaar en een primitieve functie van f .

Dit laatste wil zeggen: $D(I_{x_0}(x)) = f(x)$

5.1.3 Grafisch bewijs

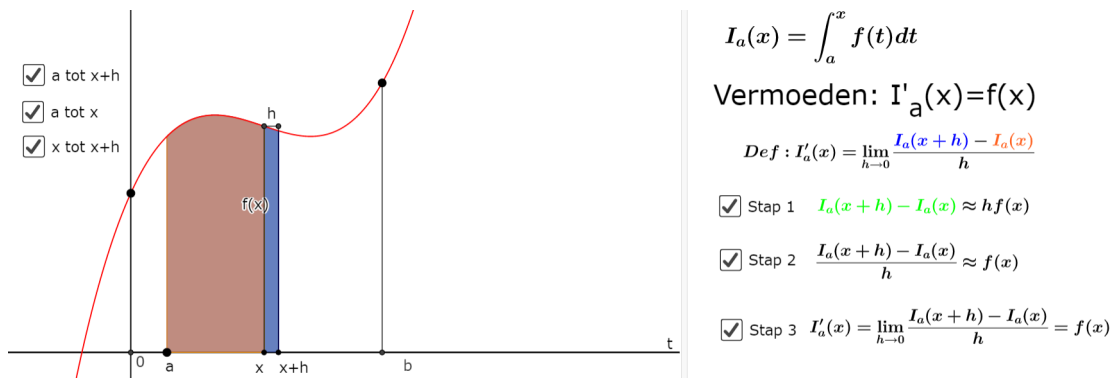


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/QzHejD4G>

5.1.4 Algebraïsch bewijs

Verwisseling van grenzen

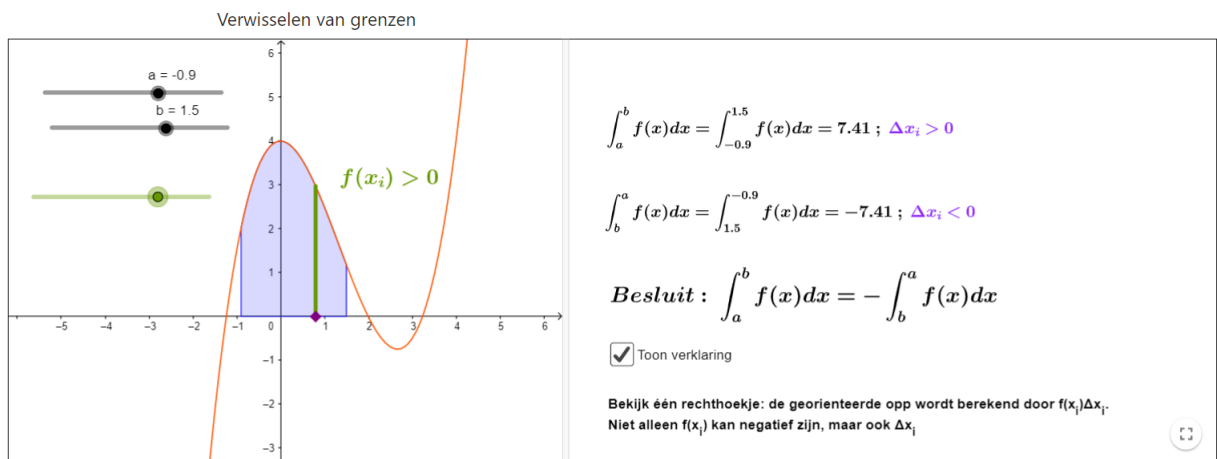


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/PwQgTmGT>

optelbaarheid over intervallen

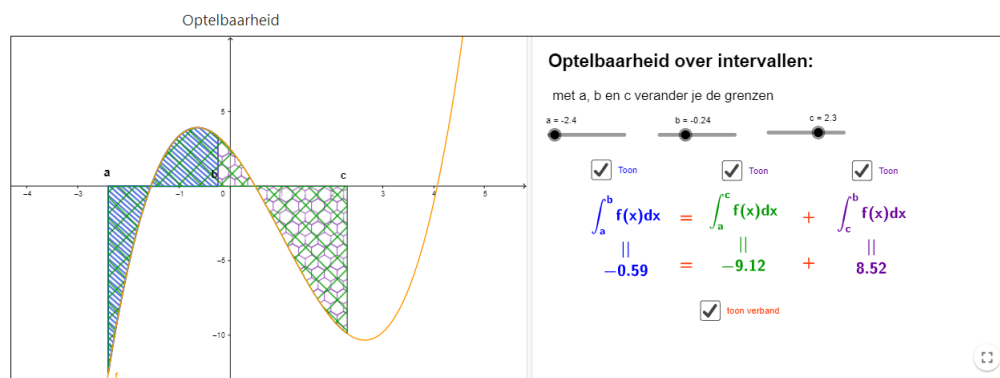
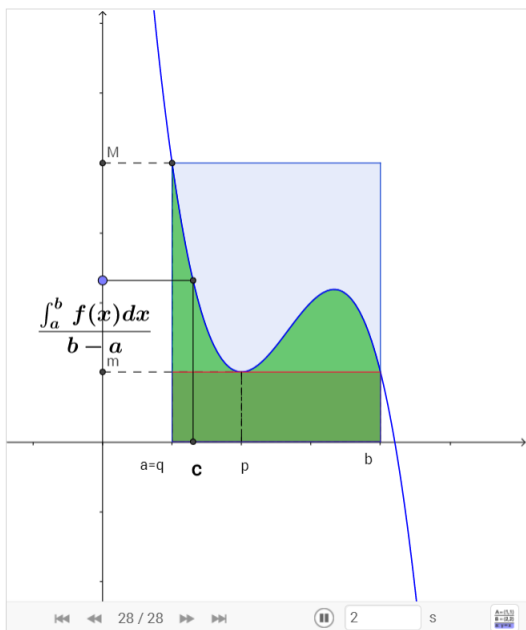
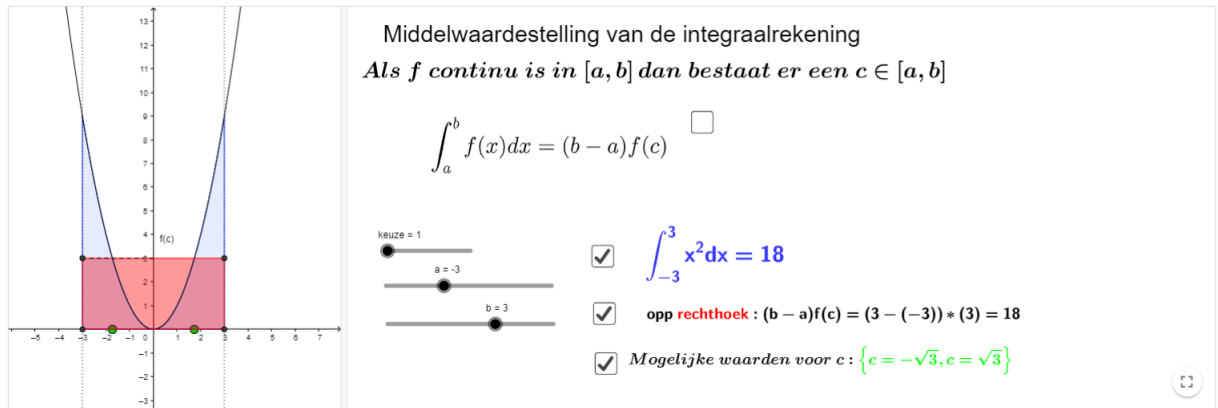


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/PwQgTmGT>

middelwaardestelling



TB : als f continu is in $[a, b]$,
 dan bestaat er minstens een $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

bewijs : (geval $a < b$)

Omdat f continu is bestaat er een $p, q \in [a, b]$ zodat $f(p) = m$ en $f(q) = M$

bijgevolg

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

$$\Rightarrow \underset{:(b-a)}{m} \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq M$$

$$f \text{ cont} \Rightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/PwQgTmGT>

bewijs

$$\begin{aligned}TB : D(I_a(x)) &= f(x) \\ \text{Bewijs} \\ D(I_a(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \quad (\text{definitie afgeleide}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} \quad (\text{Definitie integraalfunctie}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt}{h} \quad (\text{verwisselen van grenzen}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \quad (\text{optelbaarheid van intervallen}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot ((x+h) - x)}{h} \quad \text{met } c \in [x, x+h] \quad (\text{middelwaardestelling}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) \quad \text{met } c \in [x, x+h] \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/rqa2xHAC>

5.2 Primitieve functies

Begrip primitieve functie

Definitie:
Een primitieve van een functie f in een interval I is een andere functie F met als eigenschap $F'(x) = f(x)$ voor x in een interval I

Eigenschap:
Twee primitieve functies zijn aan elkaar gelijk op een constante na

Bewijs:
Als F en G twee primitieve functies zijn dan geldt:
 $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ in I
Dus $G(x) - F(x) = c$ of $G(x) = F(x) + c$ in I

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/nY3X4vVw>

5.3 Bewijs rekenregel

Bewijs rekenregel

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{met } DF = f$$

1) Een integraal functie is een primitieve functie van f

$$D(I_a(x)) = D\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

2) Twee primitieve functies zijn aan elkaar gelijk op een constante na $G(x)=F(x)+c$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) + c$$

Kies $x=a$: $\int_a^a f(t)dt = F(a) + c \Rightarrow 0 = F(a) + c \Leftrightarrow c = -F(a)$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

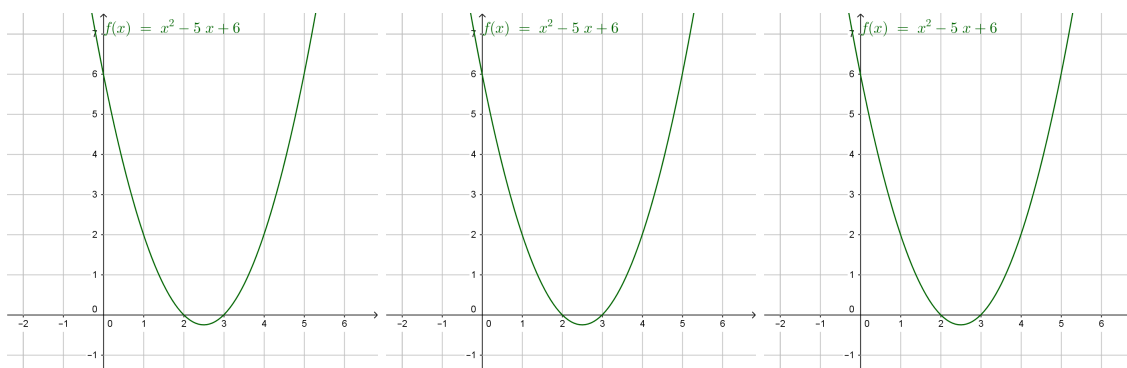
Kies nu $x=b$: $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Neem nu $t=x$: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/nY3X4vVw>

6 Oefeningen

1. Bereken en teken R_4 (midden), s_4 en S_4 over het interval $[0, 4]$



2. Bereken de "rechteindpunt" Riemansom voor $f(x) = x^3 - 6x^2$ over $[1, 3]$ met $n = 4$ deelintervallen. Is deze Riemansom een onder- of overschatting van $\int_1^3 x^3 - 6x^2 dx$? Leg uit.

3. Benader de waarde van $\int_0^1 3\sin^{-1}(x)dx$ door R_2 met α_i de rechteindpunten (A. π)

4. Welke Riemansom wordt berekend m.b.v. volgende formule?

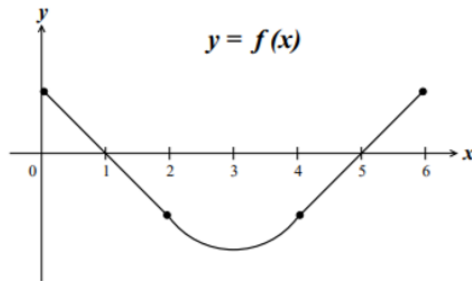
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^n f\left(a + \frac{(b-a)r}{n}\right)$$

5. Los op:

12. Which of the following gives the exact area under the curve $f(x) = \ln(x)$ on the interval $[2, 7]$?

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \ln\left(2 + \frac{5}{n}i\right)$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \ln\left(\frac{5}{n}i\right)$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{7}{n} \ln\left(2 + \frac{5}{n}i\right)$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{7}{n} \ln\left(\frac{7}{n}i\right)$
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{7}{n} \ln\left(2 + \frac{7}{n}i\right)$

6. Gegeven is onderstaande grafiek van $f(x)$

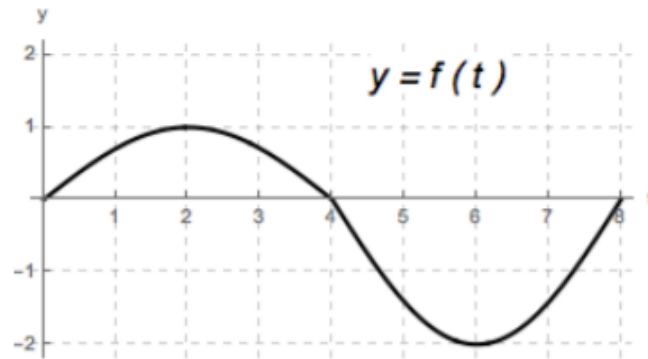


Zij $A(x) = \int_0^x f(t)dt$ met $0 \leq x \leq 6$

- (a) Over welke interval(len) is $A(x)$ positief?
- (b) Over welke interval(len) is $A(x)$ stijgend?
- (c) Over welke interval(len) is $A(x)$ hol?
- (d) Voor welke waarde(n) van x bereikt $A(x)$ een absoluut maximum?

7. Los op:

4. (12 pts) The function f is continuous on $[0, 8]$. The graph of f is shown below.



Let $A(x) = \int_0^x f(t) dt$ for $0 \leq x \leq 8$.

(a) Circle the correct statement below regarding the value of $A(4.2)$.

- i. $A(4.2) < 0$ iii. $A(4.2) > 0$
 ii. $A(4.2) = 0$ iv. No previous choice is true.

(b) Circle the correct statement below regarding the value of $A'(4.2)$.

- i. $A'(4.2) < 0$ iii. $A'(4.2) > 0$
 ii. $A'(4.2) = 0$ iv. No previous choice is true.

(c) Circle the choice that correctly completes the following sentence.

The function A attains its **maximum** value on $[0, 8]$ at ____.

- i. $x = 0$ iii. $x = 4$ v. $x = 8$
 ii. $x = 2$ iv. $x = 6$ vi. No previous choice is true.

(d) Circle the choice that correctly completes the following sentence.

The function A is **decreasing** and **concave DOWN** on the interval ____.

- i. $(0, 2)$ iii. $(4, 6)$ v. No such interval exists.
 ii. $(2, 4)$ iv. $(6, 8)$ vi. No previous choice is true.

8. Bepaal het functievoorschrift van de functie f en een waarde voor de constante c zodanig dat:

$$\int_c^x f(t) dt = \cos x - \frac{1}{2}$$

9. Bepaal de functie f en de ondergrens a waarvan $I_a(x) = x^4 - 16$ een integraalfunctie is. Is $I_a(x) = x^4 + 16$ ook een integraalfunctie van dezelfde functie f ?

10. Een functie f is continu in \mathbb{R} en voldoet aan de vergelijking

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

voor elke $x \in \mathbb{R}$. Bereken $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

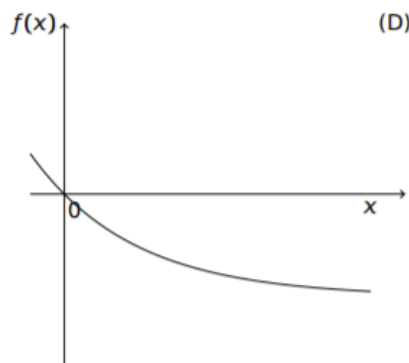
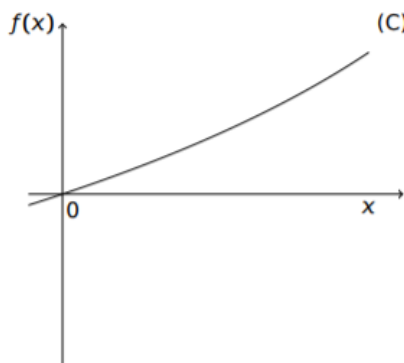
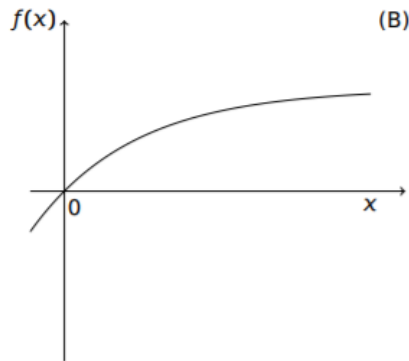
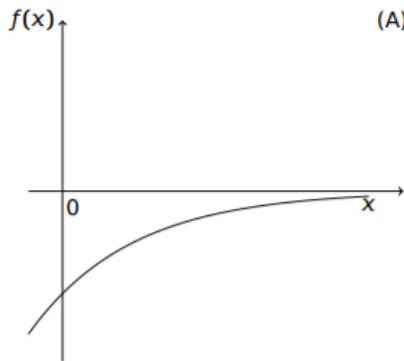
11. Bepaal alle reële getallen zodat:

$$\int_0^x t^3 - t dt = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^x t - t^3 dt$$

(Opl: $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$)

12. Los op:

Welke van onderstaande figuren kan de grafiek voorstellen van de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \int_0^x e^{-t} dt$?



13. Bewijs de optelbaarheid over intervallen als $c \leq b \leq a$

14. Bepaal c en $f(c)$ waarvan sprake in de middelwaardestelling.

(a) $f(x) = 4 - x^2, a = -2, b = 2$

(b) $f(x) = 2x - 4, a = 0, b = 4$

(c) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ over het interval $[0, 3]$

15. Als $\int_0^x f(t)dt = x \cdot e^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)dt$ bepaal dan een expliciet voorschrift voor $f(x)$. (Opl.

$f(x) = \frac{e^{2x} + 2xe^{2x}}{1 - e^{-x}}$)

7 Vragen mondeling examen

1. Geef en bewijs de formule voor het berekenen van een bepaalde integraal. Je weet al wat een primitieve functie is en dat een integraalfunctie een primitieve functie is.
2. Geef en bewijs de formule voor het berekenen van een bepaalde integraal. Alleen de structuur van het bewijs geven.
3. Leg het begrip integraalfunctie uit en bewijs $DI_a(x) = f(x)$ op een grafische intuïtieve manier.
4. Leg het begrip integraalfunctie uit en bewijs $DI_a(x) = f(x)$ op een algebraïsche manier. Je mag er vanuit gaan dat alle hulpmiddelen gekend zijn.
5. Geef en bewijs de middelwaardestelling.
6. Leg het begrip primitieve functie uit en bewijs dat twee primitieve functies aan elkaar gelijk zijn op een constante na.
7. Leg het begrip optelbaarheid over intervallen uit.
8. Leg uit: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
9. Leg het begrip Riemannsom uit.
10. Geef en verklaar de formule voor het berekenen van de inhoud bij het wentelen van een vlakdeel om de x-as.