Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 2 - ecuaciones de la recta - parte 1 de 2

1. Escribe la forma de la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta en tres dimensiones.

Para obtener la ecuación de una recta necesitamos un punto de la recta y un vector paralelo a la recta

$$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y, u_z)$$

El punto $A(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de la recta. El vector $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ es paralelo a la recta.

Ecuación paramétrica:

$$\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \\ z=z_0+\lambda\cdot u_z \end{Bmatrix}$$

Ecuación continua o cartesiana de la recta en tres dimensiones:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$$

2. Hallar la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta r que pasando por el punto $A(1,-1,3)$ es paralela a la recta de ecuación $s: \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$.

Sabemos que dos rectas paralelas tienen la misma inclinación, por lo que comparten los mismos vectores directores.

La recta s aparece en forma continua, por lo que su vector director es $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)=(-2,3,4)$. Ese vector también es paralelo a la recta r que estamos buscando.

Si tenemos un punto $A(1,-1,3)$ de la recta y un vector director, ya podemos escribir la ecuación vectorial de r .

$$r:(x, y, z)=(1,-1,3)+\lambda\cdot(-2,3,4)$$

Igualando componentes, tenemos la ecuación paramétrica.

$$r:\left\{\begin{matrix} x=1+\lambda\cdot(-2) \\ y=-1+\lambda\cdot 3 \\ z=3+\lambda\cdot 4 \end{matrix}\right\}$$

Y despejando el parámetro λ en cada ecuación paramétrica e igualando, obtenemos la ecuación continua o cartesiana de r .

$$r:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{4}$$

A veces esta ecuación continua se expresa de otras formas análogas. Por ejemplo, igualando cada término a λ y formando una terna de ecuaciones.

$$r:\left\{\begin{matrix} \lambda=\frac{x-1}{-2} \\ \lambda=\frac{y+1}{3} \\ \lambda=\frac{z-3}{4} \end{matrix}\right\}$$

Otras veces se expresa la recta como dos igualdades separadas.

$$r:\left\{\begin{matrix} \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3} \\ \frac{x-1}{-2}=\frac{z-3}{4} \end{matrix}\right\}$$

Esta forma de expresar la recta es lo que dará pasa la ecuación general o implícita, que estudiaremos en siguientes apartados.

3. Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(1,-1,3)$ **y** $B(0,2,4)$ **.**

Si tengo dos puntos de una recta, puedo obtener un vector director de la recta simplemente restando las componentes de ambos puntos.

$$\vec{AB}=(0-1,2+1,4-3)=(-1,3,1)\equiv vector \quad director \quad de \quad la \quad recta$$

Y si tenemos un punto (podemos elegir A o B) y un vector director, directamente podemos escribir la ecuación continua de la recta.

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$$